Leçon 1 : Rappel sur la dérivée

LEÇON 1 : RAPPEL SUR LA DÉRIVÉE

Objectifs

À la fin de cette leçon, vous pourrez :
• Calculer la dérivée de fonctions algébriques, trigonométriques, exponentielles, logarithmiques et trigonométriques inverses;
• Calculer la dérivée des fonctions implicites et utiliser les logarithmes pour calculer certaines dérivées.

1.1. Dérivée, dérivation implicite et dérivation logarithmique

A. Dérivée en un point

Définition 1.1.

Soit $y = f(x)$ une fonction. La fonction dérivée de f est la fonction, notée $f'(x)$, correspondant à la limite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ si cette limite existe,}$$

$$\text{ou } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ si cette limite existe,}$$

$$\text{ou } f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \text{ si cette limite existe.}$$

Notation

La dérivée d'une fonction est principalement notée de deux façons :
$f'(x)$: notation de Newton
ou
$\frac{d}{dx} f(x)$: notation de Leibniz.
Il existe d'autres notations provenant des applications dans diverses disciplines. La notation de Leibniz est plus utilisée pour la dérivation de fonctions de plusieurs variables. Dans le cours, les deux notations sont utilisées.

Règles de dérivations

Les fonctions algébriques, c'est-à-dire les fonctions obtenues de puissances de fonctions polynomiales ainsi que les fonctions transcendantes (les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques) satisfont aux règles de dérivation que vous aviez étudiées dans le premier cours de calcul. En voici quelques exemples :

Somme : $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$

Produit : $\left(f(x)\bullet g(x)\right)' = f'(x)\bullet g(x)+f(x)\bullet g'(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\bullet g(x)-f(x)\bullet g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

Puissance (entière ou réelle) : $\left[\left(f(x)\right)^n\right] = n\left(f(x)\right)^{n-1}\bullet f'(x)$

Règle de dérivation en chaîne (taux liés) : si y dépend de x et x dépend de t,

alors $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\bullet\dfrac{dx}{dt}$

Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmiques

► $[e^x]' = e^x$

► $[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x}$

► $[a^x]' = a^x\ln(a)$

► $[\log_a(x)]' = \dfrac{1}{x\ln(a)}$

Dérivées des fonctions trigonométriques

► $[\sin(x)]' = \cos(x)$

► $[\cot(x)]' = -\cos ec^2(x)$

► $[\cos(x)]' = -\sin(x)$

► $[\sec(x)]' = \sec(x)\tan(x)$

► $[\tan(x)]' = \sec^2(x)$

► $[\cos ec(x)]' = -\cos ec(x)\cot(x)$

Dérivées des fonctions trigonométriques inverses

► $[arc\sin(x)]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

► $[\arccos(x)]' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

► $[\arctan(x)]' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Exemple 1.1.

Calculons les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^4-2x^3-\left(5\sqrt{x}-\dfrac{1}{x^2}+7\right)$

b) $g(t)=(7-4t)^5$

c) $g(x)=(x-1)^3(3x+5)$

d) $y=\dfrac{2x^2+4x+3}{1-x^3}$

e) $y=\log_5 x^5+2^{x^3}$

f) $y=\ln\left(xe^{3x}\right)$

g) $x(\theta)=\cos\sqrt{\theta}+\sqrt{\sin\theta}$

h) $y=\sin(2x)\cos(x^2-3x)$

i) $f(x)=\arcsin(x^2-2x)$

j) $x(\theta)=\arctan(\sin\theta)$

Solution

a) $f(x)=x^4-2x^3-\left(5\sqrt{x}-\dfrac{1}{x^2}+7\right)$

$$f'(x)=4x^3-6x^2-\left(\frac{5}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{x^3}\right)$$

b) $g(t)=(7-4t)^5$

$$g'(t)=5(-4)(7-4t)^4$$
$$=-20(7-4t)^4$$

c) $g(x)=(x-1)^3(3x+5)$

$$g'(x)=3(x-1)^2(3x+5)+3(x-1)^3$$
$$=(x-1)\left[3(x-1)(3x+5)+3(x-1)^2\right]$$
$$=(x-1)^2\left[3(3x+5)+3(x-1)\right]$$
$$=(x-1)^2(9x+15+3x-3)$$
$$=(x-1)^2(12x+12)$$
$$=12(x-1)^2(x+1)$$

d) $y=\dfrac{2x^2+4x+3}{1-x^3}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1-x^3)\times\frac{d}{dx}(2x^2+4x+3)-(2x^2+4x+3)\times\frac{d}{dx}(1-x^3)}{\left(1-x^3\right)^2}$$
$$=\frac{(1-x^3)\times(4x+4)-(2x^2+4x+3)\times(-3x^2)}{\left(1-x^3\right)^2}$$
$$=\frac{2x^4+8x^3+9x^2+4x+4}{\left(1-x^3\right)^2}$$

e) $y=\log_5(x^5)+2^{x^3}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5x^4}{x^5.\log 5}+(3x^2)(2^{x^3})(\ln 2)$$
$$=\frac{5}{x\log 5}+(3\ln 2).x^2.2^{x^3}$$

g) $x(\theta)=\cos\sqrt{\theta}+\sqrt{\sin\theta}$

$$\frac{dx}{d\theta}=x'(\theta)=\frac{d}{dx}(\cos\sqrt{\theta})+\frac{d}{dx}(\sqrt{\sin\theta})$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sin\sqrt{\theta}+\frac{\cos\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}$$

f) $y=\ln\left(xe^{3x}\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\ln(xe^{3x}\right]$$
$$=\frac{d}{dx}\left[\ln x+3x\right]$$
$$=\frac{1}{x}+3$$

h) $y=\sin(2x)\cos(x^2-3x)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\sin(2x)\cos(x^2-3x)\right]$$
$$=\cos(x^2-3x)\times\frac{d}{dx}\left[\sin(2x)\right]+\sin(2x)\times\frac{d}{dx}\left[\cos(x^2-3x)\right]$$
$$=2\cos(2x)\cos(x^2-3x)+\sin(2x).\left[-(2x-3)\sin(x^2-3x)\right]$$

i) $f(x)=\arcsin(x^2-2x)$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\arcsin(x^2-2x)\right]$$
$$=\frac{2x-2}{\sqrt{1-(x^2-2x)^2}}$$

j) $x(\theta)=\arctan(\sin\theta)$

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\left[\arctan(\sin\theta)\right]$$
$$=\frac{\cos(\theta)}{1+\sin^2(\theta)}$$

Exemple 1.2.

Soit la fonction $f(x)=x^3-x^2-6x$.

a) Trouver l'équation de la tangente à la courbe de f(x) en $x=-2$.

b) Trouver l'équation de la droite normale à cette tangente en $x=-2$.

Solution

Les équations de la tangente et de la normale à une courbe au point $\left(x_0, f(x_0)\right)$ sont respectivement données par les formules suivantes :

Tangente : $y-f(x_0)=f'(x_0)\left(x-x_0\right)$; Normale : $y-f(x_0)=\dfrac{-1}{f'(x_0)}\left(x-x_0\right)$

Comme $f'(x)=3x^2-2x-6$ alors $f'(-2)=10$ et $f(-2)=0$.

D'où :

a) l'équation de la tangente au point $\left(-2,0\right)$ est : $y=10\left(x+2\right)$

b) l'équation de la normale à cette tangente est : $y=\dfrac{-1}{10}\left(x+2\right)$

B. Dérivation implicite

Dériver une équation implicitement, ou qui décrit implicitement une variable comme fonction de l'autre, nous a servi à obtenir les dérivées des fonctions logarithmiques et trigonométriques inverses. On peut aussi s'en servir pour trouver des pentes de tangentes à des courbes qui ne sont pas décrites par des fonctions.

Étapes à suivre si l'on cherche $\frac{dy}{dx}$:

Étape 1 : On dérive les 2 côtés de l'équation par rapport à $\boldsymbol{x}$ en utilisant la règle de dérivation en chaîne et le fait que la variable $\boldsymbol{y}$ est implicitement définie comme une fonction de $\boldsymbol{x}$.

Étape 2 : On isole $\frac{dy}{dx}$ de l'expression obtenue.

Exemple 1.3.

a) Calculer $\frac{dy}{dx}$ si $y^6 = y + x^2$

b) Calculer y' si $\frac{y^2}{2x} = \frac{x}{2y+3x}$

c) Calculer la pente de la tangente à la courbe, définie par cette fonction au point P (1, 2).

Solution

a) Comme $y^6 = y + x^2$ alors

$$\frac{d}{dx}\left[y^6\right] = \frac{d}{dx}\left[y + x^2\right] \Leftrightarrow 6y^5 \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + 2x$$

$$\Leftrightarrow (6y^5 - 1) \cdot \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

b) Comme $\frac{y^2}{2x} = \frac{x}{2y+3x}$, cette expression peut s'écrire $2y^3 + 3xy^2 = 2x^2$

donc $6y^2\frac{dy}{dx} + 3y^2 + 6xy\frac{dy}{dx} = 4x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4x - 3y^2}{6y^2 + 6xy}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{4(1) - 3(2)^2}{6(2)^2 + 6(1)(2)} = \frac{-2}{9}$

C. Dérivation logarithmique

<u>Étapes à suivre pour utiliser une dérivation logarithmique :</u>

<u>Étape 1</u>
On applique la fonction logarithme sur chaque membre de l'équation puis on simplifie.
<u>Étape 2</u>
On dérive membre par membre l'équation simplifiée obtenue.
<u>Étape 3</u>
On isole $\dfrac{dy}{dx}$ de l'expression obtenue.

<u>Exemple 1.4.</u>

a) Calculer y' si $y = \dfrac{e^{2x}(1-x)^4}{(1+4x)^2\left(x^2+3\right)}$

On applique d'abord la fonction **ln** sur chaque membre de l'expression comme suit :

$$\ln y = \ln\left[\frac{e^{2x}(1-x)^4}{(1+4x)^2\left(x^2+3\right)}\right]$$

$$\ln y = \ln\left[e^{2x}(1-x)^4\right] - \ln\left[(1+4x)^2\left(x^2+3\right)\right]$$

$$= \ln(e^{2x}) + \ln\left[(1-x)^4\right] - \ln\left[(1+4x)^2\right] - \ln\left[\left(x^2+3\right)\right]$$

$$\ln y = 2x + 4\ln(1-x) - 2\ln(1+4x) - \ln\left(x^2+3\right)$$

On dérive membre par membre cette dernière expression et on obtient :

$$\frac{y'}{y} = 2 - \frac{4}{1-x} - \frac{8}{1+4x} - \frac{2x}{x^2+3} \Leftrightarrow y' = y\left[2 - \frac{4}{1-x} - \frac{8}{1+4x} - \frac{2x}{x^2+3}\right]$$

$$\Leftrightarrow y' = 2y\left[1 - \frac{2}{1-x} - \frac{4}{1+4x} - \frac{x}{x^2+3}\right]$$

D'où :

$$y' = 2\left(\frac{e^{2x}(1-x)^4}{(1+4x)^2(x^2+3)}\right)\left(1 - \frac{2}{1-x} - \frac{4}{1+4x} + \frac{x}{x^2+3}\right)$$

b) Calculer y' si $y=(\tan x)^{x}$

Appliquons la fonction logarithme sur chaque membre de l'expression :

$$\ln y=\ln\left[(\tan x)^{x}\right]\Leftrightarrow \ln y=x\ln(\tan x)$$

En dérivant membre à membre, on obtient :

$$\frac{y'}{y}=\ln(\tan x)+x\cdot\frac{\sec^2 x}{\tan x}=\ln(\tan x)+\frac{x}{\cos x\sin x}$$

$$\frac{y'}{y}=\ln(\tan x)+x\sec(x)\csc(x)$$

Exercice de compréhension 1.1.

On lance une balle vers le haut à partir du toit d'un édifice avec une vitesse initiale de 14,7 m/s. La position de la balle (sa hauteur mesurée en mètres) t secondes après son lancement est donnée par $s(t)=-4,9t^2+14,7t+49$.

a) Quelle est la hauteur de l'édifice?

b) Quelle est la vitesse $v(t)=\dfrac{ds}{dt}$ de la balle au temps t ?

c) À quel moment la vitesse de la balle est-elle nulle?

d) Sur quel intervalle de temps la balle se dirige-t-elle vers le haut ?

e) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle?

f) Combien de temps s'écoule-t-il avant que la balle ne touche le sol?

g) Sur quel intervalle de temps la balle se dirige-t-elle vers le bas?

h) Quelle est la distance totale parcourue par la balle?

Exercice 1.1.

1. Calculez la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (3x-2)^4(2x+5)^3$

b) $g(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

c) $h(x) = x\sqrt{x^2+1}$

d) $v(t) = \dfrac{(t-1)^3}{(2t-5)^2}$

e) $u(x) = \dfrac{1}{\ln(3-x)}$

f) $r(\theta) = \sqrt[3]{\cos(3\theta)}$

g) $f(z) = e^{z\tan z}$

h) $w(\theta) = \sqrt{\sin(2\pi\theta)}$

i) $i(x) = \left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^3$

j) $u(\theta) = \sin(3\theta)\cos(2\theta) + \sin(2\theta)\cos(3\theta)$

k) $p(z) = e^{\left(-z^2/2\right)}$

l) $T(y) = \dfrac{y\sqrt{y}}{1-y}$

m) $u(x) = \ln(\sin^2 x)$

n) $s(\theta) = \sin(\theta) - \theta\cos(\theta)$

o) $q(x) = x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$

p) $y(u) = \sqrt[3]{u^3+3u^2}$

q) $z(\theta) = \tan^4\left(\dfrac{\theta}{4}\right)$

r) $p(t) = t(7t-2)^6$

s) $j(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

t) $r(x) = xe^{\left(2\sqrt{x}\right)}$

u) $g(\theta) = 2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

v) $u(x) = \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

w) $s(x) = x^{\sin(2x)}$

2. Trouvez la dérivée première y' pour les fonctions suivantes :

a) $xy = y^3 + x^2$

b) $y\sin x + x\sin y = 1$

c) $\tan^3 y = x^2$

d) $x + \sec y = \dfrac{x}{y}$

e) $x^2y + xy^2 = 2 + x$

f) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2$

g) $x\sin x + y\cos y = \pi$

h) $(8-x)y^2 = x^3$

i) $x = \dfrac{\ln y}{y}$

3. a) Trouvez l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction $f(x) = x^3 + 3x^2$ au point $\mathrm{A}(1,4)$.

b) Donnez l'équation de la droite normale à la courbe au point $\mathrm{A}(1,4)$.

4.

a) Trouvez la pente de la tangente au graphe de la $f(x) = \left(1-x^3\right)^2$ au point $\mathrm{A}(2,14)$.

b) Soit C la courbe d'équation $2xy + xy^3 - y^2 = x + y$. Trouvez la pente de la tangente à C au point $\mathrm{B}(1,1)$.

c) Déterminez la pente de la tangente à la courbe d'équation $xy = 6(x-y)$ au point $\mathrm{A}(3,2)$.