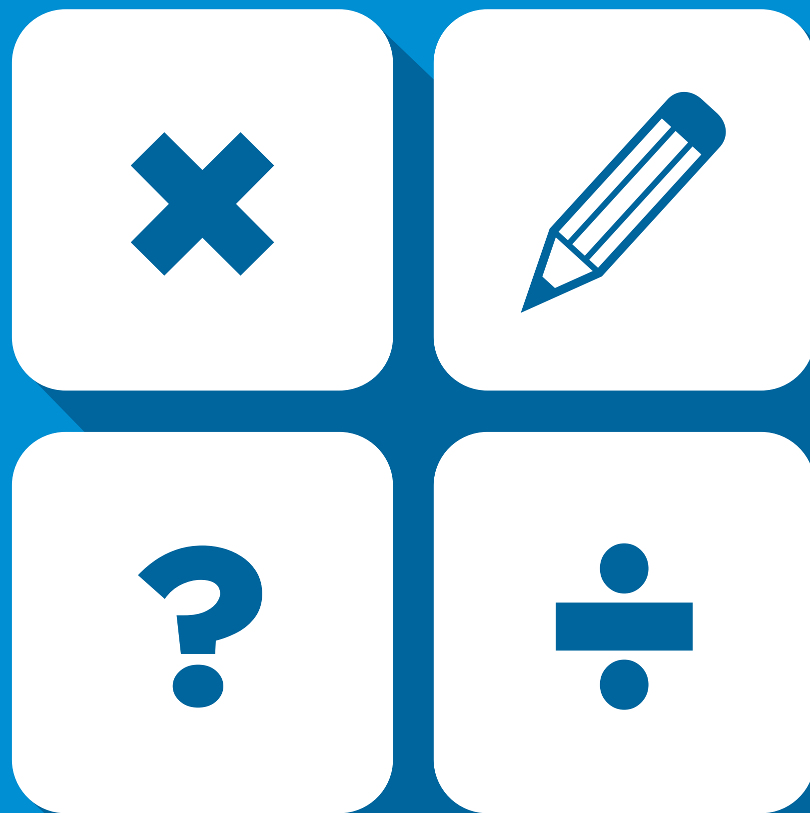


CHAPITRE 17

LES SITUATIONS MATHÉMATIQUEMENT IMPOSSIBLES

Une situation mathématiquement impossible est une description où les quantités mentionnées dans l'histoire ne correspondent pas au sens de la situation. Les élèves sont appelés à formuler des hypothèses pour corriger une donnée à la fois, à analyser et à représenter les différentes versions, à raisonner et à démontrer leur raisonnement plutôt que de solutionner le problème.

ACTIVITÉ 17.1 : LE TRAIN

Apprentissages visés :

- Aider les élèves à comprendre l'ensemble des liens entre les quantités dans une relation multiplicative afin de développer une vision holistique et flexible de la situation ;
- Apprendre à identifier les rôles respectifs des éléments d'une situation donnée, à établir les liens mathématiques entre eux, à représenter ces liens par un schéma ;
- Continuer le développement du langage mathématique chez les élèves ainsi que leur capacité à déduire les relations et à les démontrer mathématiquement.

Matériel :

- Affiche de la situation du train ;
- Affiches des situations multiplicatives déjà vécues en classe ;
- 3 notes autocollantes ;
- Une calculette pour l'enseignante ;
- Tableau effaçable à sec et crayon pour chaque élève ;
- Verres en plastique (facultatif) ;
- Jetons (facultatif) ;
- Pâte à modeler (facultatif).

Temps : 30 à 45 minutes

DÉROULEMENT

PHASE DE PRÉPARATION

Présenter l'histoire suivante ou montrer l'affiche :

Il y a 24 passagers dans le train. Le train est composé de 12 voitures. Dans chaque voiture, il y a 6 passagers.

Demander aux élèves ce qu'ils pensent de cette histoire, si tout va bien dans celle-ci. Selon le niveau d'aisance avec les nombres que les élèves ont développé, certains élèves peuvent dire que tout va bien. D'autres élèves peuvent remarquer que s'il y a 6 passagers dans chacune de 12 voitures, le train doit transporter plus que 24 passagers.

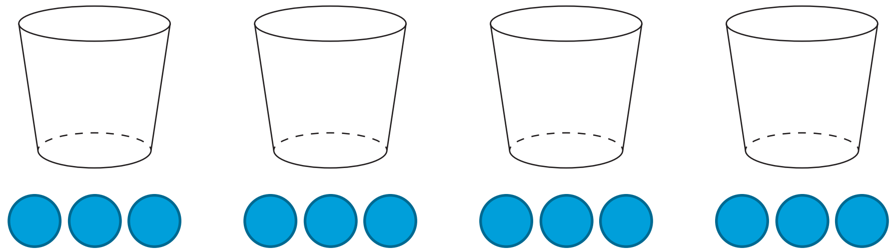
AU BESOIN, utiliser au début une version plus facile, par exemple : 30 passagers, 10 voitures et 5 passagers par voiture ou 3 voitures, 6 passagers au total et 1 passager par voiture.

DIFFÉRENCIATION

Certains élèves ont besoin de manipuler des objets pour comprendre l'histoire du train et remarquer l'incohérence mathématique. Voici comment on peut réaliser une activité préparatoire :

Remettre quelques petits verres de plastique transparents et des jetons à chaque élève. Chaque verre représente une voiture, les jetons sont les passagers.

Demander aux dyades de représenter l'histoire en utilisant les verres et les jetons en plaçant les passagers dans les voitures. Demander ensuite de sortir les « passagers » des « voitures » et de les ranger, en ligne, pour visualiser le nombre de passagers par voiture, les voitures et l'ensemble des passagers.

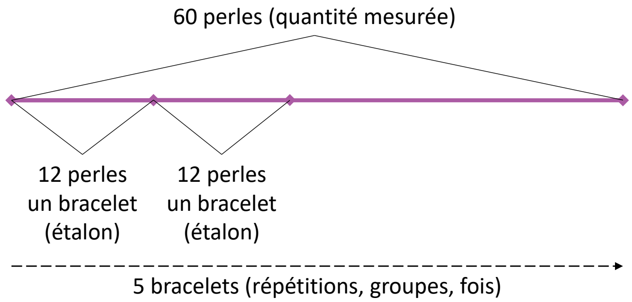


Conclure avec les élèves que les nombres qui figurent dans l'histoire ne fonctionnent pas **ensemble**.

Amener les élèves à constater qu'il suffit de changer un seul nombre pour que l'histoire prenne du sens. Formuler avec les élèves les trois hypothèses sur « l'erreur possible » :

- Le nombre de passagers dans le train n'est pas 24 ;
- Le nombre de voitures n'est pas 12 ;
- Le nombre de passagers dans chaque voiture n'est pas 6.

Les inscrire sur une affiche et annoncer que le travail sera d'analyser chaque hypothèse.



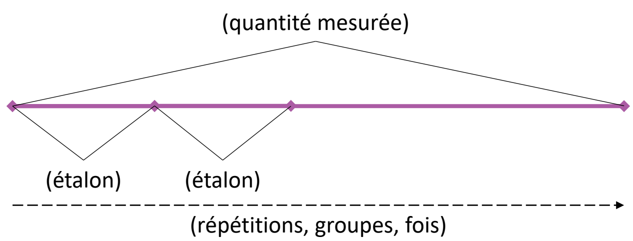
À l'aide de l'affiche des perles (chapitre 11), rappeler aux élèves qu'ils ont travaillé les relations entre les réglettes et une bande de papier (chapitre 10) et les perles dans un bracelet.

Enseignant

Pour analyser un problème ou une histoire, nous avons appris à représenter les quantités en utilisant des lignes. Nous avons représenté des perles dans l'activité des perles.

Comment faisons-nous pour imaginer les choses à l'aide du schéma ?

Si j'efface la mention des perles, pouvez-vous « voir » les perles et les bracelets ?



PHASE DE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE

À l'aide de l'affiche de la situation multiplicative, demander aux élèves, en dyades, de construire une représentation schématique pour identifier les rôles des quantités mentionnées dans la situation du train.

IMPORTANT ! Pour cibler l'attention des élèves sur les relations et le rôle des quantités, cacher les nombres de la situation du train avec des notes autocollantes.

DIFFÉRENCIATION

Proposer aux élèves qui essaient de dessiner chaque passager d'utiliser la pâte à modeler pour les représenter, pour ensuite former des segments qui représentent les passagers dans une voiture.

Trois passagers représentés avec la pâte à modeler.

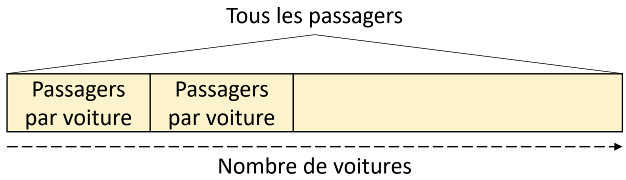
Une voiture du train (les passagers sont « roulés » ensemble) représentée avec la pâte à modeler. On peut imaginer n'importe quel nombre de passagers dans la voiture.

Le train composé de 3 voitures, représenté avec la pâte à modeler. Si les séparations ne sont pas faites, on peut imaginer n'importe quel nombre de voitures.

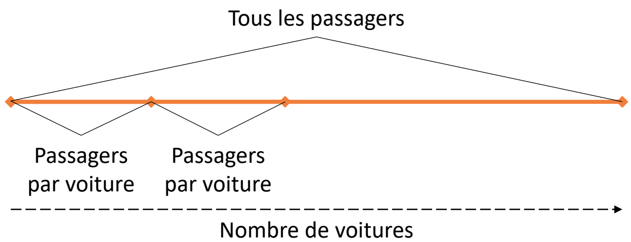
Inviter les élèves à circuler dans la classe, en silence, pour observer les représentations des autres avant la discussion en grand groupe. Construire avec les élèves une représentation convenable, qui représente les relations et les rôles des quantités mentionnées dans l'histoire.

EXEMPLES DE REPRÉSENTATION DE LA SITUATION

Exemple 1



Exemple 2



Revenir aux trois hypothèses d'erreurs possibles notées sur des affiches. Discuter de ces hypothèses dans l'ordre proposé par les élèves.

Pour chaque hypothèse, présenter l'histoire en plaçant une étiquette « ? » sur la quantité que les élèves croient erronée et rendre visibles les deux autres quantités. Demander aux élèves de représenter l'histoire avec les données connues et un point interrogation sur le nombre cherché par l'hypothèse. Voici un exemple :

Il y a 24 passagers dans le train.
Le train est composé de 12 voitures.
Dans chaque voiture, il y a ? passagers.

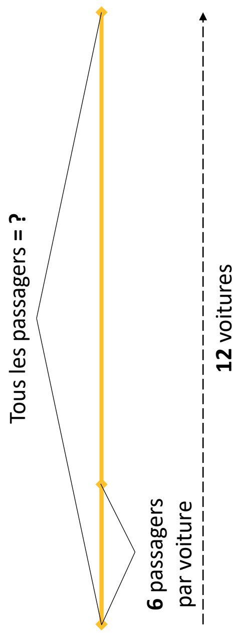
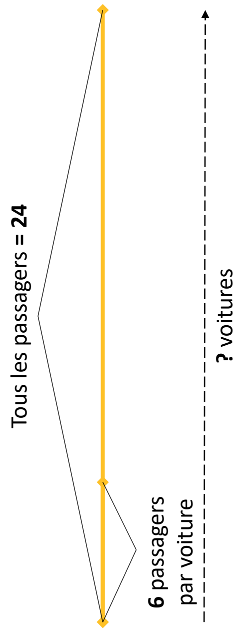
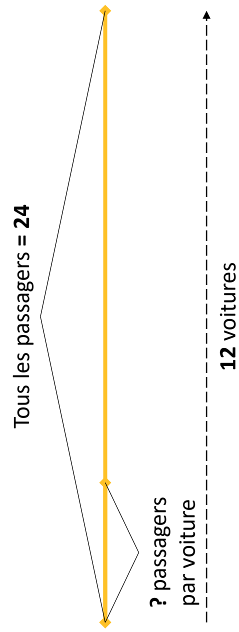
Discuter des représentations proposées pour préciser le rôle des quantités.

Amener les élèves à déduire l'opération arithmétique qui permet de calculer le nombre cherché par l'hypothèse.

IMPORTANT ! Pour amener les élèves à formuler des phrases de calcul (24 ÷ 12 =) et non des équations (12 × x = 24), demandez-leur de taper leur phrase de calcul sur une calculette. Cela n'est pas possible.

IMPORTANT ! Il est important que les élèves transforment mentalement leur vision séquentielle de la situation en une opération appropriée, qui est souvent inverse par rapport à l'action décrite. Cette pratique de transformation contribue au développement de la flexibilité de leur pensée mathématique.

Schématisation et verbalisation pour le travail autour des hypothèses.

HYPOTHÈSE A	HYPOTHÈSE B	HYPOTHÈSE C
Le nombre de passagers dans le train est incorrect.	Le nombre de voitures est incorrect.	Le nombre de passagers par voiture est incorrect.
Il y a ? passagers dans le train. Le train est composé de 12 voitures. Dans chaque voiture, il y a 6 passagers.	Il y a 24 passagers dans le train. Le train est composé de ? voitures. Dans chaque voiture, il y a 6 passagers.	Il y a 24 passagers dans le train. Le train est composé de 12 voitures. Dans chaque voiture, il y a ? passagers.
	SCHÉMA POSSIBLE	
		
	PHRASE DE CALCUL	
$12 \times 6 =$ ou $6 \times 12 =$ Il faut prendre 6 groupes de 12 passagers, un groupe pour chaque voiture.	$24 \div 6 =$ Les 24 passagers sont regroupés en groupes de 6.	$24 \div 12 =$ Les 24 passagers sont divisés en 12 groupes égaux.

IMPORTANT! Indépendamment de la lecture « mathématique » de la phrase de calcul, 12 signifie le nombre de voitures, et 6 le nombre de passagers par voiture.

	RÉPONSE	
Il y a 72 passagers dans le train.	**Le train est composé de 4 voitures.**	**Il y a 2 passagers dans chaque voiture.**

IMPORTANT ! Demander aux élèves de mimer avec leurs mains l'action de reconstruction de la quantité recherchée.

Par exemple :

- Répéter l'étalon, les passagers d'une voiture, autant de fois que le nombre de voitures ;
- Grouper les passagers en groupes de 6 jusqu'à ce qu'il ne reste plus de passagers ;
- Distribuer les passagers également entre les 12 voitures.

PHASE D'INTÉGRATION

Afficher les trois schémas et les trois phrases de calcul simultanément pour les comparer et pour en discuter.

Enseignant

Pourquoi les schémas sont-ils similaires ?

Élèves

Les trois schémas représentent une même histoire.

Les quantités jouent les mêmes rôles : les passagers dans le train – quantité totale ; les passagers dans une voiture – étalon ; le nombre de voitures – le nombre de répétitions.

Enseignant

Pourquoi les phrases de calcul sont-elles différentes ?

Élèves

Dans chaque cas, nous sommes à la recherche d'une autre quantité inconnue.

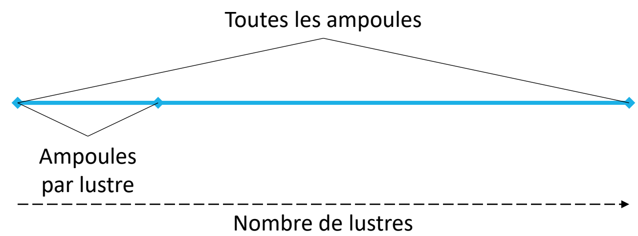
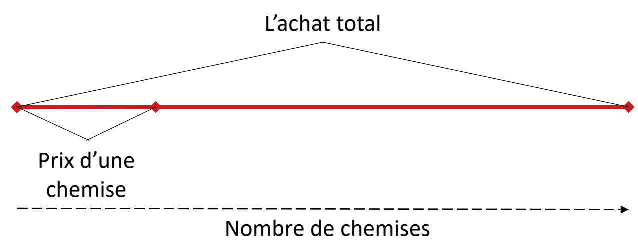
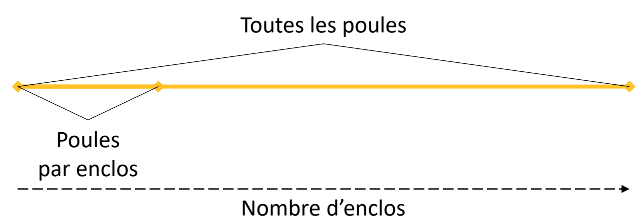
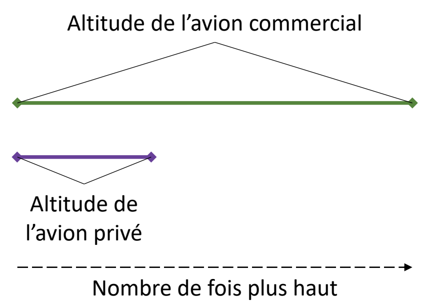
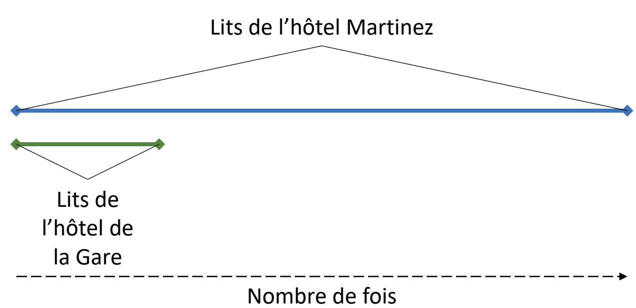
Une fois, on cherche le nombre de passagers au total.

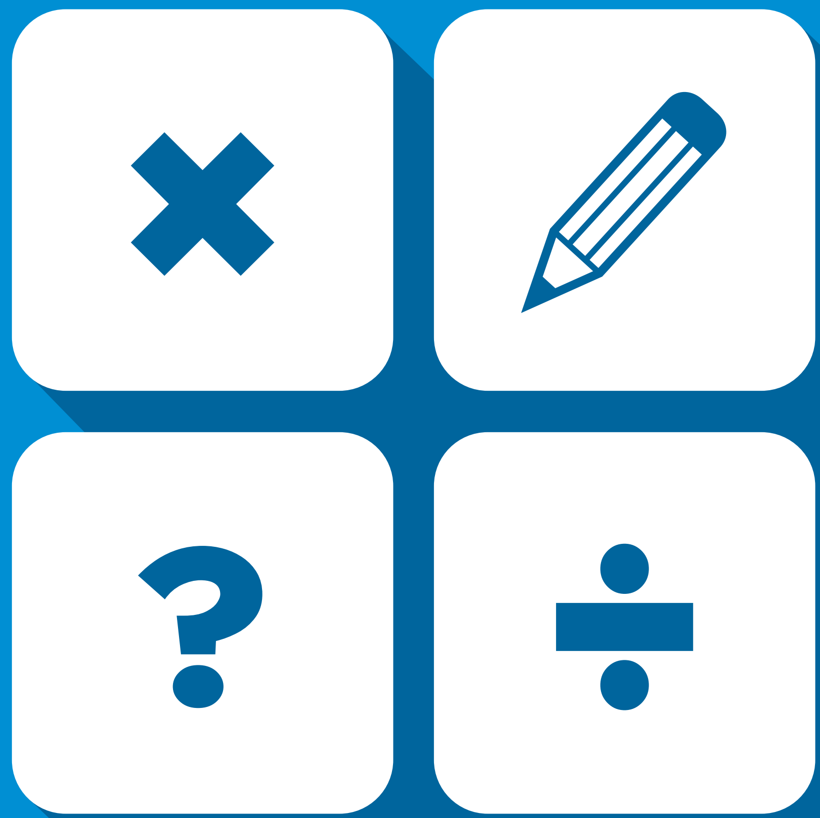
Une fois, on cherche le nombre de voitures.

Une autre fois, on cherche le nombre de passagers par voiture.

Conclure qu'il faut observer quels sont les rôles des quantités dans la situation et comment les quantités sont organisées dans le schéma. C'est par l'analyse de la situation et de la place de l'inconnue que l'on sait quelle opération mathématique effectuer pour trouver la réponse.

AUTRES SITUATIONS MATHÉMATIQUEMENT INCOHÉRENTES

<table>
<tr><th>SITUATION</th><th>REPRÉSENTATION</th></tr>
<tr><td>Il y a 12 lustres identiques. Chaque lustre est équipé de 6 ampoules. Pour équiper tous les lustres, il faut 84 ampoules.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Nicolas affirme qu’il a payé 90 $ pour acheter 15 chemises à 9 $ chacune.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Mon oncle Réjean possède 525 poules. Il les a placées dans 35 enclos, 21 poules dans chaque enclos.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Un avion commercial vole à 10 000 mètres. C’est 4 fois plus haut que la hauteur de vol d’un petit avion privé. Le petit avion vole à 2 000 mètres.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>À l’hôtel Martinez, 120 lits sont disponibles. L’hôtel de la Gare, lui, possède seulement 40 lits. C’est 6 fois moins qu’à l’hôtel Martinez.</td><td>
</td></tr>
</table>



CHAPITRE 18

LES ÉNIGMES

Ce chapitre propose une façon différente de travailler les relations avec les élèves pour leur permettre de mieux saisir les liens entre une description verbale d'un problème et une représentation schématique.

ACTIVITÉ 18.1 : RÉSOUDRE UNE ÉNIGME

Apprentissages visés :

- Poursuivre le travail sur la relation multiplicative de comparaison ;
- Reconnaître la relation multiplicative dans des situations et des contextes variés ;
- Interpréter des schémas et leur donner du sens.

Matériel :

- L'énigme à afficher à l'écran ou au tableau (complément web pour le chapitre 18) ;
- Copie de l'énigme à chaque élève ou dyade ;
- Crayons de couleur.

Temps : 30 à 40 minutes par énigme

DÉROULEMENT

PHASE DE PRÉPARATION

Rappeler aux élèves qu'ils ont travaillé les relations entre les quantités dans des situations variées et qu'ils se sont exercés à les représenter par des schémas. Annoncer qu'ils vont maintenant analyser les schémas créés par quelqu'un d'autre.

Former des dyades pour que les élèves puissent discuter de leurs idées et débattre de leurs opinions.

> **Lors des expérimentations,** les enseignants ont mentionné qu'il est préférable de placer les élèves en équipes homogènes pour que chacun et chacune ait l'occasion de proposer ses idées, et pour favoriser les échanges. Afin de susciter l'engagement, il est également suggéré d'inviter les élèves à travailler individuellement dans un premier temps pour ensuite se regrouper en dyades et terminer les échanges en grand groupe.

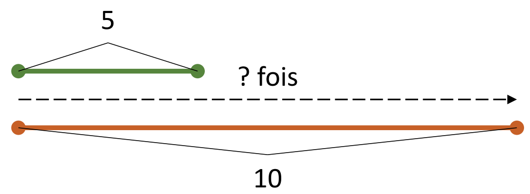
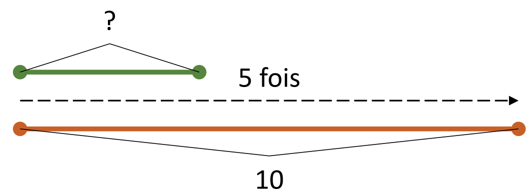
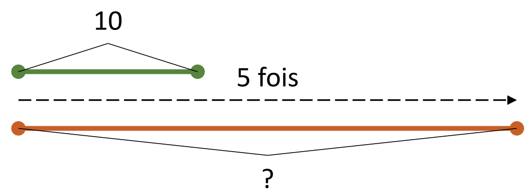
PHASE DE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE

Annoncer aux élèves que les élèves d'une autre classe ont représenté des problèmes. Ils ont identifié les quantités connues avec les nombres, et ce que l'on cherche dans le problème par un point d'interrogation. Malheureusement, leur enseignante n'a pas identifié quel problème va avec quel schéma. Il faut aider cette enseignante à identifier les associations.

Enseignant

Il est possible qu'un schéma ne corresponde à aucun problème. Il est aussi possible qu'un problème ne soit pas représenté. Si vous trouvez un problème orphelin, je vous demande de le représenter par un schéma. Si vous trouvez un schéma orphelin, je vous demande de composer un problème qui lui correspond.

■ ÉNIGME 1

1. Violette a 10 ans. Son père est 5 fois plus âgé qu'elle. Quel âge son père a-t-il ?	
2. Marta a 10 ans. Son frère est 5 fois plus jeune qu'elle. Quel âge son frère a-t-il ?	
3. Samuel a 10 $. David a 5 $. Combien de fois la somme de Samuel est-elle plus grande que la somme de David ?	

Donner du temps aux élèves pour réfléchir et pour discuter.

Si plusieurs élèves ou dyades peinent à réaliser l'activité, l'enseignant peut faire une pause pour que le groupe partage différentes stratégies.

Enseignant

Par quoi avez-vous commencé ? Quelles étaient vos stratégies ?

Voici différentes stratégies pour réaliser les associations :

- Utiliser un code de couleur pour surligner d'une même couleur, dans le problème et le schéma, les données ayant le même rôle ;
- S'intéresser dans un premier temps à ce que l'on cherche, la question ;
- Dans le problème, écrire au-dessus des quantités leur rôle, pour ensuite les repérer dans les schémas.
- Placer les mots du problème dans les schémas pour observer si les relations sont respectées.

Attirer l'attention des élèves sur le fait que dans un problème de comparaison, il y a une quantité plus grande et une plus petite. On peut donc se questionner, au regard des problèmes, sur ces quantités.

Si les élèves progressent bien dans la réalisation de cette activité, ces stratégies pourront être mises en évidence lors du retour en grand groupe, à la suite du travail.

PHASE D'INTÉGRATION

Revenir sur les différentes stratégies des élèves pour réaliser ces énigmes en mettant de l'avant l'importance du rôle des quantités dans les problèmes, afin de faire les bonnes associations. Donner la possibilité à tous les élèves de débattre de leurs idées et de démontrer le sens de ce qu'ils proposent avec des gestes.

Faire un retour sur tous les problèmes, dans l'ordre proposé par les élèves. Il est possible qu'un schéma ou un problème semble plus facile ou que le groupe fasse plus facilement consensus. L'enseignant veillera toutefois à poser des questions pour traiter en profondeur la compréhension des élèves :

Enseignant

Vous me dites que les schémas (b) et (c) expriment une même situation : une quantité est inconnue et l'autre est connue, et c'est 5 fois quelque chose. Ai-je raison ?

Élève 1

C'est vrai que c'est 5 fois quelque chose, mais dans le schéma (b), on connaît la grande quantité et on cherche la petite. Dans le schéma (c), c'est l'inverse.

Élève 2

Dans le schéma (b), il faut faire 10 ÷ 5 et dans le schéma (c), il faut faire 10 × 5.

Enseignant

Alors ce n'est pas la même chose du tout, mais dans les deux cas, la grande quantité est 5 fois plus grande que la petite quantité. Très bien !

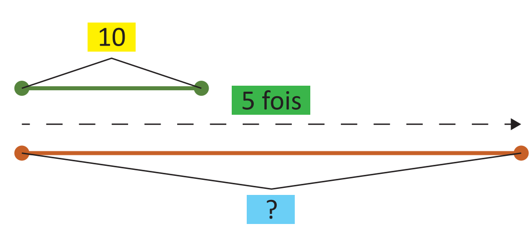
Enseignant

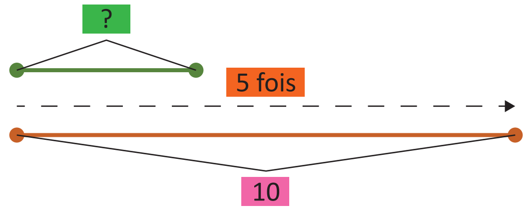
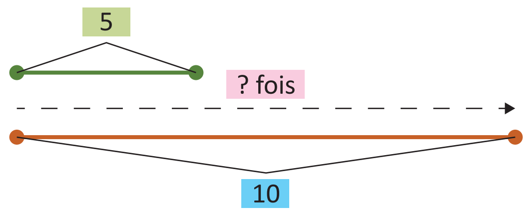
Selon les schémas (a) et (b), il faut faire 10 ÷ 5. Je ne vois pas de différence entre les deux. Pouvez-vous m'aider ?

Élève 1

C'est vrai qu'on va faire la même opération, mais ces deux schémas ne racontent pas la même chose. Dans le schéma (a), en faisant 10 ÷ 5, on va trouver combien de fois on doit répéter la petite quantité pour arriver à la grande. Alors que dans le schéma (b), en faisant 10 ÷ 5, on va trouver la petite quantité.

Voici un exemple de l'énigme résolue et colorée :

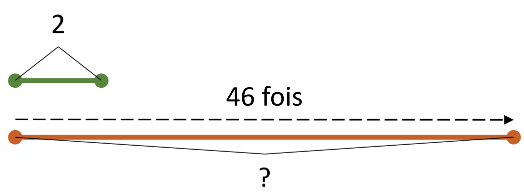
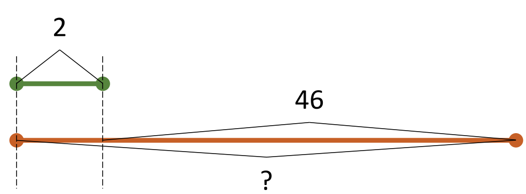
1. Violette a 10 ans. Son père est 5 fois plus âgé qu'elle. Quel âge a son père ?	c) 

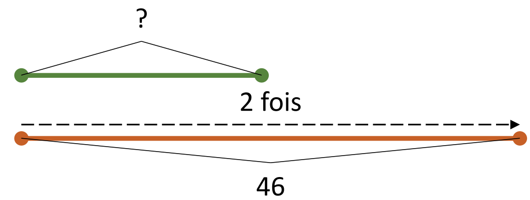
2. Marta a 10 ans. Son frère est 5 fois plus jeune qu'elle. Quel âge a son frère ?	b) 
3. Samuel a 10 $. David a 5 $. Combien de fois la somme de Samuel est-elle plus grande que la somme de David ?	a) 

> ***Lors des expérimentations,*** les enseignantes ont témoigné que les élèves aimaient beaucoup ce type d'activités. Bien qu'à première vue, la réalisation des associations semble une activité facile, les élèves ont dû réfléchir et s'attarder aux détails afin de discriminer les différents schémas et réinvestir les connaissances acquises dans les activités antérieures. Le fait de réfléchir d'une autre façon sur les problèmes a suscité l'intérêt des élèves, en particulier ceux qui s'investissaient moins lors des activités demandant uniquement de représenter les relations d'un problème, activité proposée habituellement dans les classes.

AUTRES ÉNIGMES À PROPOSER AUX ÉLÈVES

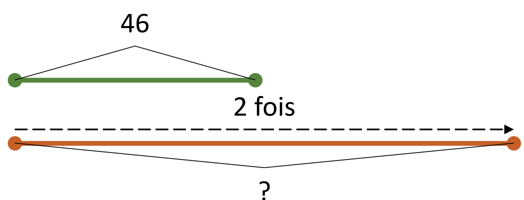
ÉNIGME 2

1. Francis possède 46 images. Léa en a 2 fois plus que lui. Combien Léa a-t-elle d'images ?	a) 
2. Thomas possède 46 images. C'est 2 fois plus que ce que Lyne possède. Combien Lyne a-t-elle d'images ?	b) 

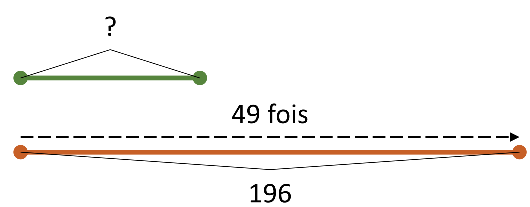
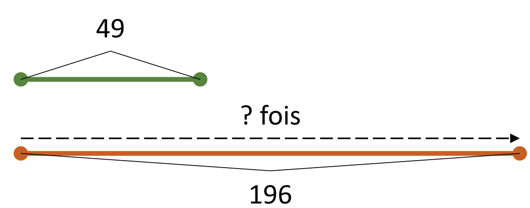
3. Maria possède 2 images. François en a 46 fois plus qu'elle. Combien François a-t-il d'images ?	c) 
4. Lyse possède 2 images. Martin a 46 images de plus qu'elle. Combien Martin a-t-il d'images ?	

Réponse à l'énigme 2 : 2-c ; 3-a ; 4-b ; 1 est un problème orphelin.

Voici un exemple de schéma pour représenter le problème 1 :



■ ÉNIGME 3

1. Martine veut s'offrir des bijoux. Le collier vaut 196 $. Le bracelet vaut 49 $. Combien de fois plus cher le collier coûte-t-il ?	a) 
2. Un livre de poésie coûte 49 fois moins cher qu'un album de photos artistiques. L'album coûte 196 $. Combien coûte le livre de poésie ?	b) 
3. Liam a gagné 49 $ pour son travail. Pierre a gagné 196 $ pour le travail qu'il a fait. Combien de fois Liam a-t-il gagné moins de dollars ?	c)