Proposer des tâches dans lesquelles les élèves sont appelés à identifier, parmi différentes écritures mathématiques, celles qui modélisent les relations entre les données d'un problème

Pour amener les élèves à interpréter les écritures en tant que modèle possible d'une situation (Mercier et Quilio, 2018), nous nous sommes appuyée sur les travaux de Giroux (2021a) et avons intégré, dans notre séquence, des énoncés de problèmes avec présentation de différentes écritures mathématiques. La tâche pour les élèves consiste alors à identifier, parmi des écritures proposées, celles qui modélisent les relations entre les données d'un problème. Prenons, à titre d'exemple, cet énoncé de problème : *Alexia mesure 115 cm. Elle grandit de 5 cm par année. Combien mesurera-t-elle dans 4 ans?* Les élèves doivent identifier, parmi les quatre écritures mathématiques suivantes, celles qui représentent adéquatement les relations entre les données du problème.

115 x 5	115 + 5 + 5 + 5 + 5
115 + 5 + 4	115 + 4 x 5

Cette façon de procéder met l'accent sur le calcul relationnel plutôt que sur le calcul numérique. Le calcul relationnel concerne la mise en relation des données d'un problème et donc le choix des opérations selon les spécificités des problèmes rencontrés, tandis que le calcul numérique réfère aux opérations faites sur les données numériques du problème et concerne donc la mémorisation des faits arithmétiques et l'apprentissage des procédures arithmétiques (Vergnaud, 1981). Comme le montre Butlen (2007), le choix des opérations n'est toutefois pas indépendant des connaissances sur les nombres et des capacités en calcul. Le fait de contrôler, sur le plan numérique, le calcul que sollicite un problème aide les élèves à établir correctement les relations entre les données.

Notre recherche permet de préciser la façon de piloter des énoncés de problèmes avec choix d'écritures pour amener les élèves à concevoir qu'une écriture mathématique peut représenter une situation. Pour ce faire, il apparaît souhaitable que l'enseignante présente d'abord uniquement l'énoncé de problème pour laisser les élèves se l'approprier. Elle peut par exemple demander aux élèves de raconter le problème dans leurs mots pour s'assurer qu'ils ont une représentation adéquate de celui-ci avant de leur remettre les écritures mathématiques. Bien qu'il soit pertinent de remettre l'énoncé de problème dans un premier temps pour que les élèves n'aient pas à traiter simultanément le problème et les écritures, il apparaît cependant préférable que les élèves ne résolvent pas le problème avant de remettre les écritures, car le fait d'avoir identifié la réponse au problème conduit par la suite les élèves à rechercher les écritures dont le résultat correspond à la réponse obtenue, et le travail se fait alors sur le calcul numérique plutôt que sur le calcul relationnel.

Ainsi, pour favoriser l'interprétation des écritures mathématiques en tant que modèle possible d'une situation, nous suggérons, à la suite d'une brève phase d'appropriation du problème, de présenter les écritures mathématiques aux élèves et de les inviter à s'entendre sur celles qui, selon eux, représentent adéquatement les relations entre les données du problème. Pour favoriser les interactions entre les élèves et les amener à confronter leur point de vue, chaque écriture peut être présentée sur une étiquette différente. L'enseignante peut alors demander de mettre, d'un côté, les écritures qui modélisent les relations entre les données du problème et d'un autre côté, celles qui leur semblent inappropriées. Nous avons privilégié cette façon de faire dans le cadre de notre recherche. Cependant, dans le cas d'un enseignement auprès d'un groupe-classe, les différentes écritures pourraient être inscrites sur une feuille, et l'enseignante pourrait demander aux élèves, en équipe (pour favoriser le débat), d'encercler celles qui représentent correctement les relations entre les données du problème.

L'interprétation d'écritures mathématiques impliquant plus de deux termes représente un défi particulier pour les élèves du primaire, qui préfèrent généralement, pour résoudre un problème, faire plusieurs calculs qu'un seul calcul avec plusieurs termes. Si le problème présenté ci-haut avait été soumis aux élèves sans choix d'écritures, la stratégie la plus fréquente aurait sans doute été de faire deux calculs, obtenant ainsi un résultat intermédiaire pouvant être mis en relation avec les données du problème. Il est effectivement possible d'identifier d'abord de combien de cm Alexia a grandi (4 x 5 = 20) et ensuite d'ajouter à 115 cm cette mesure (115 + 20 = 135). Or, dans la tâche proposée ci-haut, les écritures mathématiques modélisant les relations entre les données du problème comportent plus de deux termes : 115 + 5 + 5 + 5 + 5 et 115 + 4 x 5. Notons que la deuxième écriture apparaît particulièrement difficile à interpréter, car elle implique différentes opérations (une addition et une multiplication). Enfin, si les élèves ne peuvent identifier les écritures qui modélisent la relation entre les données du problème, l'enseignante peut les retirer et inviter les élèves à résoudre le problème. Par la suite, elle peut revenir sur les écritures, permettant ainsi aux élèves d'établir la relation entre leur démarche, où le problème est résolu en deux étapes avec un résultat intermédiaire (20), et des écritures mathématiques qui représentent l'ensemble des relations entre les données du problème.

En plus de permettre un travail sur les chaînes d'opérations et sur la priorité des opérations, la mise en relation d'écritures mathématiques avec un énoncé de problème prépare les élèves à l'algèbre. La résolution algébrique d'un problème nécessite effectivement de modéliser, dans un premier temps, les relations entre les données par une écriture mathématique où les nombres inconnus sont représentés par des lettres, pour ensuite résoudre les équations sur le plan strictement numérique, c'est-à-dire sans chercher à établir la relation avec les données du problème.

Présenter une variété de situations mathématiques

Comme le soulève Vergnaud (1990), un concept mathématique se développe à partir de situations mathématiques variées qui permettent d'aborder différents sens de ce concept et d'abstraire ses propriétés essentielles en dégageant les invariants dans les situations présentées. Pour favoriser la décontextualisation des connaissances, il convient ainsi de varier les situations mathématiques présentées aux élèves, et ce, non seulement en modifiant l'habillage du problème, mais aussi en proposant des situations qui font appel à différents sens d'un concept. La présentation d'une variété de situations mathématiques autour d'un même concept permet aux élèves d'élargir le caractère d'utilité de leurs connaissances et de les faire fonctionner en tant que savoir (Giroux, 2013).

Pour présenter une variété de situations, on peut jouer sur l'habillage du problème, c'est-à-dire sur des éléments qui ne modifient pas les stratégies de solution. Par exemple, le fait de partager également 15 billes entre 3 personnes ou 15 bonbons entre 3 personnes a peu d'effet sur les stratégies engagées par les élèves. Il n'en demeure pas moins que lorsque les connaissances des élèves ont un caractère très local, ils ne reconnaissent pas nécessairement leur utilité, plus tard, lorsque l'habillage du problème est modifié.

Il est également possible de proposer une variété de situations en jouant sur la structure des problèmes. Dans ce cas, les problèmes se différencient par la nature des relations entre les nombres, c'est-à-dire qu'une même opération prend en quelque sorte un sens différent selon la structure des problèmes. La présentation de situations convoquant différents sens d'un concept nécessite une analyse épistémologique du savoir mathématique en jeu. Dans notre séquence, pour présenter des situations variées sur les structures multiplicatives, nous nous sommes appuyée sur le modèle de Vergnaud (1981). Différentes structures de problèmes multiplicatifs définies dans ce modèle sont présentées à la section 1.3.

Pour favoriser l'établissement de relations entre les situations, il apparaît intéressant de miser sur l'écriture mathématique. C'est alors le savoir, par le biais de l'écriture, qui favorise la liaison entre les situations. Par exemple, l'écriture 5 + 5 + 5 peut être dégagée tant pour représenter 3 enveloppes contenant chacune 5 jetons, 3 dés de 5 points chacun et 3 bonds de 5 cases chacun d'un lapin se déplaçant sur une frise numérique. Nous jugeons toutefois préférable de ne pas chercher à expliquer aux élèves la relation entre les situations, mais plutôt de les laisser la découvrir par eux-mêmes. Autrement dit, nous dévoluons aux élèves la responsabilité d'établir la relation entre les situations. Plus le savoir est maîtrisé, moins le contexte prend d'importance, et plus la relation entre les situations devient transparente. C'est ainsi qu'un élève s'exclame, au moment de chercher une solution lors d'une nouvelle situation : « Ah ! Je sais ! C'est comme on a fait la dernière fois ! ».

Par ailleurs, étant donné que des recherches (Bloch et Salin, 2004; Perrin-Glorian, 1993) montrent la difficulté des élèves à réinvestir les connaissances utilisées dans des situations basées sur la théorie des situations didactiques lors d'énoncés de problèmes et d'exercices classiques, Salin (2007) suggère de présenter aux élèves des situations intermédiaires, c'est-à-dire des énoncés de problèmes et des exercices semblables à ceux que l'on rencontre couramment dans les manuels scolaires. La mobilisation d'une connaissance dans une situation est certainement insuffisante pour que les élèves puissent discriminer les situations dans lesquelles cette connaissance est pertinente et celles où elle ne l'est pas. La présentation de situations intermédiaires permet aux élèves de mettre à l'épreuve les connaissances nouvellement développées dans d'autres contextes, ce qui favorise la décontextualisation de leurs connaissances. Chacune des situations proposées dans la séquence que nous avons construite est parsemée de situations intermédiaires permettant aux élèves de réinvestir leurs connaissances dans de nouveaux contextes. Les situations intermédiaires consistent essentiellement, dans notre séquence, en de courts énoncés de problèmes qui renvoient à d'autres contextes que celui de la situation de référence, mais qui mettent en jeu les mêmes contenus mathématiques.

1.3 Conditions favorables à l'enseignement-apprentissage des structures multiplicatives

En mathématiques, ce sont généralement les mêmes difficultés qui sont rencontrées par les élèves lors de l'appropriation d'un savoir donné, que ce soit des élèves « ordinaires », des élèves dits en difficulté d'apprentissage ou même des élèves ayant reçu un diagnostic de dyscalculie (Fischer, 2009; Houle et Giroux, 2016; Roiné, 2009). Bien que ces difficultés persistent plus longtemps chez certains élèves pour diverses raisons, il n'en demeure pas moins que pour construire une intervention qui favorise l'apprentissage des mathématiques, il apparaît fondamental de prendre en compte les caractéristiques du ou des savoirs visés par l'enseignement. Considérant que chaque savoir mathématique est spécifique, l'apprentissage d'un savoir consiste à s'approprier ses caractéristiques, et certaines d'entre elles présentent un défi particulier pour l'apprentissage et donc, aussi, pour l'enseignement. Il convient ainsi de proposer aux élèves des situations qui suscitent une activité mathématique riche autour des principaux enjeux propres à un concept ou à une collection de concepts donnés. Dans cette section, nous nous intéressons donc aux conditions favorables à l'enseignement-apprentissage des structures multiplicatives, qui regroupent l'ensemble des situations impliquant une ou plusieurs multiplications et divisions.

Avant de présenter ces conditions, il apparaît pertinent de faire un bref rappel mathématique relatif à la multiplication. La multiplication est l'une des quatre opérations de l'arithmétique élémentaire. Bien qu'elle soit généralement symbolisée par une croix (x), elle peut aussi être représentée par un point ou par une absence de symbole. Le résultat de la multiplication se nomme le produit, et les nombres que l'on multiplie sont appelés les facteurs. Par exemple, dans 4 x 3 = 12, les nombres 4 et 3 sont les facteurs, et le nombre 12 est le produit. Il est possible d'interpréter la multiplication de deux nombres naturels (entiers positifs) comme une addition répétée. Dans ce cas, l'un des facteurs agit comme multiplicande, et l'autre comme multiplicateur. Le multiplicande est le nombre qui subit l'action, c'est-à-dire le nombre qui est additionné, et le multiplicateur, soit celui par lequel on multiplie, correspond au nombre de fois que le multiplicande est réitéré. Si on considère 4 x 3 comme la répétition du nombre 3, 4 fois (3 + 3 + 3 + 3), le facteur 4 agit à titre de multiplicateur et le facteur 3, à titre de multiplicande. La langue française peut conduire à interpréter que le facteur à gauche occupe le rôle de multiplicateur et celui à droite, celui de multiplicande. Cependant, on peut tout aussi bien considérer à l'inverse que le facteur à gauche est le multiplicande, et que celui à droite est le multiplicateur. Il est ainsi tout à fait approprié d'interpréter 4 x 3 comme l'itération de 4, 3 fois (4 + 4 + 4).

Bien que la multiplication puisse être exprimée par une addition répétée, la pensée multiplicative est nettement plus exigeante que la pensée additive (Clark et Kami, 1996). La compréhension de la multiplication requiert effectivement un niveau d'abstraction supérieur qui se construit à partir de la pensée additive. Les travaux piagétiens montrent que la pensée multiplicative, contrairement à la pensée additive, nécessite le traitement simultané de différentes relations d'inclusion. La figure suivante, qui s'appuie sur les travaux de Clark et Kamii (1996), met en comparaison l'emboîtement des unités dans 4 + 3 = 7 d'une part, et dans 4 x 3 = 12 d'autre part.

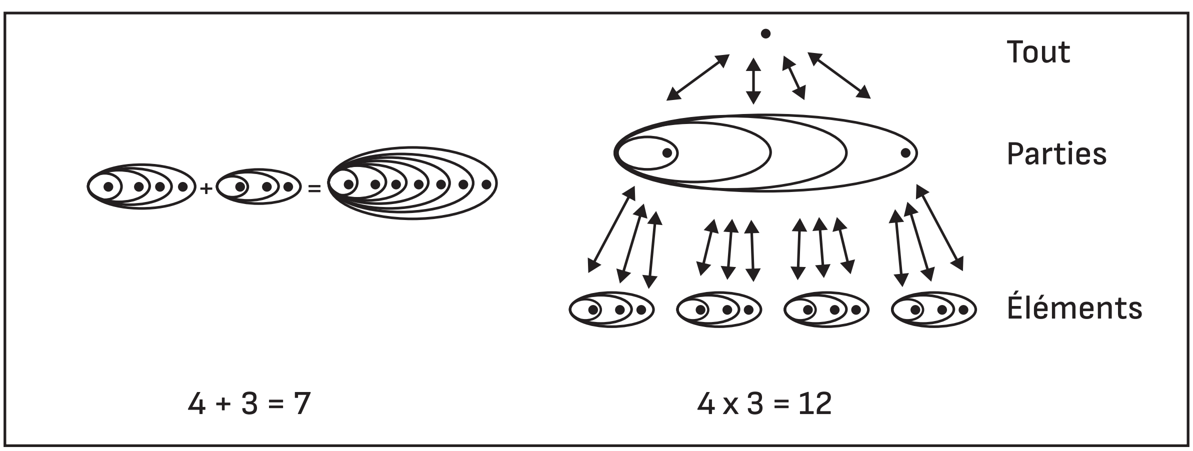

Figure 1 | Emboîtement des unités dans les raisonnements additif et multiplicatif (figure adaptée de Clark et Kamii, 1996, p. 42)

La pensée additive est inhérente à la construction des nombres naturels, dont la suite repose implicitement sur l'addition répétée de 1. La pensée additive implique ainsi de considérer l'emboîtement des unités, c'est-à-dire que 1 est inclus dans 2, qui est inclus dans 3, qui est inclus dans 4, et ainsi de suite.

Lorsqu'on additionne deux nombres, chacun des termes est composé d'unités simples. Dans 4 + 3 = 7, le nombre 4 est composé de 4 unités de 1 et le nombre 3, de 3 unités de 1. Ainsi, la somme 7 inclut 6, qui inclut 5, qui inclut 4, etc.

Le schéma illustrant 4 x 3 met en évidence deux types de relations dans le raisonnement multiplicatif : 1) à l'horizontale est représenté l'emboîtement des unités simples (cette relation d'inclusion est la même que celle impliquée dans l'addition); 2) à la verticale est représenté l'emboîtement de différents ordres d'unité (éléments/parties/tout), c'est-à-dire que le produit, 12 (le tout), inclut 4 unités composites (les parties), qui incluent chacune 3 unités simples (les éléments). Ainsi, il n'y a plus seulement des unités de 1 (des unités simples), mais aussi des unités composites, c'est-à-dire des unités qui incluent des unités d'un autre ordre. Cette multiplication implique donc de considérer que « 3 unités de 1 » forment « 1 unité de 3 » (emboîtement éléments/partie), mais aussi que les « 4 unités de 3 unités » forment « 1 unité de 12 » (emboîtement éléments/parties/tout). Les unités sont donc emboîtées les unes dans les autres, c'est-à-dire que l'unité 12 (une unité d'unités d'unités), inclut 4 unités (des unités d'unités) qui incluent à leur tour chacune 3 unités (des unités simples). Cela n'est pas sans rappeler l'emboîtement des unités de numération où l'unité centaine inclut 10 unités dizaines, qui incluent chacune, à leur tour, 10 unités.

Rendre les connaissances sur les structures multiplicatives nécessaires en attachant le nouveau à l'ancien

Pour favoriser l'apprentissage des structures multiplicatives, les élèves doivent éprouver les limites de leurs connaissances et avoir besoin de celles qui sont visées par l'enseignement. Cette condition est essentielle pour que le recours aux connaissances mathématiques ciblées repose sur les contraintes propres aux situations et qu'elles ne soient pas utilisées simplement pour répondre aux exigences de l'enseignante. Autrement dit, pour que les élèves en reconnaissent l'utilité, la stratégie optimale pour résoudre les problèmes doit faire appel aux savoirs mathématiques visés (Brousseau, 1998). Les situations de notre séquence sont ainsi construites pour que la multiplication, mais aussi d'autres contenus qui y sont étroitement liés tels que la numération de position décimale et la division, soient éventuellement nécessaires pour résoudre efficacement les problèmes.

Or, pour permettre aux élèves d'attacher ces nouvelles connaissances à leurs connaissances anciennes, les élèves doivent, dans un premier temps, pouvoir mettre en place une stratégie à partir des connaissances qu'ils possèdent et, éventuellement, être appelés à les adapter pour résoudre les problèmes posés. Il convient ainsi de réfléchir soigneusement à la progression des valeurs des variables didactiques en anticipant les possibilités d'action des élèves. L'efficacité des stratégies dépend des caractéristiques des problèmes, en particulier de leur structure et des nombres qui y sont impliqués. Nous dégageons, dans le tableau 2, les stratégies les plus susceptibles d'apparaître pour résoudre des problèmes d'isomorphisme de mesures de multiplication (cette structure de problèmes est définie dans la section suivante), qui est la structure la plus exploitée au primaire dans l'enseignement des structures multiplicatives (Houle, 2019). Pour chaque stratégie est analysé son domaine d'efficacité.

Tableau 2 | Domaine d'efficacité des principales stratégies pour résoudre des problèmes d'isomorphisme de mesures de multiplication

Stratégies	Exemple pour le problème suivant : Logan a *x* sacs contenant chacun *y* billes. Combien y a-t-il de billes en tout ?	Domaine d'efficacité
Dénombrement *Représentation de chacun des éléments* ■ *avec du matériel* ■ *au moyen d'un dessin*	Si $x = 4$ et $y = 3$ Dessiner 4 sacs. À l'intérieur de chaque sac, dessiner 3 billes. Dénombrer le nombre total de billes.	Efficace lorsque le nombre total d'éléments est relativement petit (disons inférieur à 30).
Comptage rythmé	Si $x = 4$ et $y = 3$ Faire du double comptage en contrôlant, à l'oral, les éléments (billes) et, avec les doigts, les groupements (sacs) : 1, 2, **3** (**1**)… 4, 5, **6** (**2**)… 7, 8, **9** (**3**)… 10, 11, **12** (**4**).	Efficace lorsque le multiplicande (*y*) correspond à 2, 3 ou 4 (en raison des limites de la mémoire de travail) et que le multiplicateur (*x*) est inférieur à 11 (permettant ainsi un contrôle du nombre de groupements avec les doigts lors du double comptage).
Comptage par intervalles	Si $x = 4$ et $y = 5$ Faire du double comptage en contrôlant, à l'oral, les éléments (billes) et, avec les doigts, les groupements (sacs) : 5 (1), 10 (2), 15 (3), 20 (4).	Efficace lorsque le multiplicande (y) correspond à 2, 5 ou une puissance de 10 (puisque ces nombres facilitent le comptage par intervalles) et que le multiplicateur (*x*) est inférieur à 11.
Addition répétée ■ *avec sommes partielles ou non* ■ *en respectant l'ordre des termes ou non*	Si $x = 4$ et $y = 5$ Avec sommes partielles : $5 + 5 = 10$; $10 + 5 = 15$; $15 + 5 = 20$. En ne respectant pas l'ordre des termes (associativité de l'addition) : $5 + 5 + 5 + 5 = (5 + 5) + (5 + 5) = 10 + 10 = 20$	Efficace lorsque le multiplicateur (*x*) est relativement petit (disons inférieur à 6).

Stratégies	Exemple pour le problème suivant : Logan a *x* sacs contenant chacun *y* billes. Combien y a-t-il de billes en tout ?	Domaine d'efficacité
Multiplication ■ *fait connu* ■ *recours à l'algorithme* ■ *appui sur des propriétés de la multiplication* ■ *recours à la calculette*	Si $x = 7$ et $y = 9$ Fait connu : 7 x 9 = 63 Appui sur la distributivité de la multiplication sur la soustraction : 7 x 9 = 7 x (10 – 1) = 7 x 10 – 7 x 1 = 70 – 7 = 63	Efficace même avec de grands nombres.

Ce tableau peut servir de repère pour réfléchir à la progression des valeurs des variables didactiques. Il faut cependant noter que certains élèves en difficulté maintiennent, malgré les caractéristiques des problèmes, des stratégies élémentaires avec lesquelles ils sont à l'aise. Bien qu'à nos yeux, étant donné nos connaissances, certaines stratégies semblent coûteuses (en termes de temps par exemple), du point de vue de l'élève, il peut apparaître moins exigeant, et surtout plus sécurisant, d'engager une stratégie qu'il contrôle que de prendre le risque de mettre en place une stratégie incertaine. C'est ainsi que des élèves, pour trouver le nombre total de crayons-feutres avec 6 boîtes en contenant chacune 8, dessinent un à un les crayons. Comme le soulève Brousseau (1998), un saut informationnel peut alors être nécessaire pour que les élèves abandonnent de leur propre chef une stratégie élémentaire. La notion de saut informationnel suggère que les valeurs des variables didactiques, plutôt que d'augmenter de façon progressive, augmentent abruptement pour ainsi créer une rupture, provoquer un déséquilibre et contraindre les élèves à modifier leurs stratégies.

Varier les contextes cardinal et ordinal

Pour présenter des situations variées, il s'avère pertinent de proposer des contextes cardinal et ordinal. Dans le contexte cardinal, on s'intéresse au nombre d'éléments d'un ensemble, tandis que dans le contexte ordinal, on s'intéresse plutôt au rang d'un élément dans une collection d'éléments ordonnés. Pour illustrer chacun de ces contextes, comparons la première et la troisième situation de notre séquence. La première situation, les enveloppes, implique un contexte cardinal. Le nombre total de jetons obtenus est recherché à partir d'un certain nombre d'enveloppes comprenant chacune le même nombre de jetons. Dans cette situation, la multiplication 4 x 3 peut représenter 4 enveloppes contenant chacune 3 jetons, et le produit, 12, correspond au nombre total de jetons. La troisième situation, le lapin, implique en revanche un contexte ordinal. Dans cette situation, un lapin se déplace sur une frise numérique en faisant des bonds réguliers. La multiplication 4 x 3 peut alors représenter 4 bonds de 3 cases chacun. Dans ce cas-ci, le produit 12 correspond à la 12^{e} case, soit celle sur laquelle arrive le lapin. Notre recherche montre que le contexte ordinal peut favoriser l'abandon de stratégies de dénombrement au profit de stratégies plus élaborées sur le plan mathématique.

Proposer des problèmes multiplicatifs variés

Pour amener les élèves à rencontrer différents sens que peut prendre un concept, il convient de présenter des problèmes variés. Pour ce faire, il apparaît pertinent de s'appuyer sur le modèle de Vergnaud (1981), qui définit différentes structures de problèmes, notamment dans le champ conceptuel des structures multiplicatives. Ces structures, qui se différencient par la nature des relations établies entre les nombres, sont grandement utiles pour interpréter les difficultés des élèves en prenant en compte l'interaction entre leurs connaissances et les caractéristiques des problèmes. Nous présentons ci-après les structures de problèmes au cœur de l'enseignement-apprentissage des structures multiplicatives au primaire, lesquelles se regroupent en trois grandes catégories : les problèmes d'isomorphisme de mesures, les problèmes scalaires ainsi que les problèmes de produit de mesures et de produit cartésien.

Les problèmes d'isomorphisme de mesures

Les problèmes d'isomorphisme de mesures impliquent deux sortes de mesures (par exemple, des billes et des sacs) et mettent en jeu quatre mesures qui forment une proportion. Nous présentons ci-dessous les trois structures de problèmes appartenant à cette catégorie qui sont les plus fréquentes à l'ordre primaire, soit la multiplication, la division partage et la division groupement. Dans chacune d'elles, une des quatre mesures correspond à 1.

La multiplication

La multiplication, au primaire, est essentiellement travaillée à partir de problèmes d'isomorphisme de mesures. Illustrons cette structure à l'aide d'un exemple tiré de notre séquence : *À sa fête, Zoé souhaite remettre 5 bonbons à chacun de ses amis. Si elle invite 7 amis, combien de bonbons offrira-t-elle au total?* Le tableau de proportionnalité suivant permet de mettre en évidence les relations entre les données. Notons qu'il n'est cependant pas nécessaire – voire non souhaitable – de présenter de tels tableaux aux élèves pour enseigner les trois structures de problèmes présentées ici.

Problème d'isomorphisme de mesures, la multiplication

Amis	Bonbons
1	5
7	X

Comme le montre le tableau ci-dessus, ce problème implique deux sortes de mesures, soit des amis et des bonbons, et quatre mesures proportionnelles : 5 bonbons pour 1 ami est équivalent à x bonbons pour 7 amis. Ainsi, il peut se résoudre par une multiplication en s'appuyant soit sur le raisonnement suivant, 7 x 5 bonbons = 35 bonbons, soit sur le raisonnement suivant, 7 amis × 5 bonbons/amis = 35 bonbons. Lorsque les nombres sont peu élevés, comme c'est le cas ici, il est aussi possible de trouver la solution par dénombrement (par exemple en dessinant les bonbons), par comptage par intervalles (en comptant 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35) ou encore, en procédant par addition répétée, 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 35 (chaque nombre représentant ici des bonbons). Ces trois stratégies sont d'une certaine façon un premier pas vers la multiplication, dans la mesure où elles amènent les élèves à traiter de façon plus ou moins simultanée différents ordres d'unités, et ce, que ce soit pour contrôler le nombre de groupements de 5 bonbons à dessiner, le moment où arrêter le comptage par intervalles de 5 ou le nombre de 5 à écrire dans l'addition répétée.

La division partage

La division, dans les problèmes d'isomorphisme de mesures, peut prendre le sens d'un partage ou d'un groupement. Notons cependant que l'interprétation de la division en tant que partage est parfois surinvestie dans les manuels scolaires au détriment du sens groupement (Houle, 2019). À titre d'exemple, voici d'abord un problème de division partage : *Pierre-Luc a 18 morceaux de fromage. Il les partage également entre ses 3 souris. Combien de morceaux de fromage chacune de ses souris aura-t-elle?*

Problème d'isomorphisme de mesures, la division partage

Souris	Morceaux de fromage
1	X
3	18

Tout comme dans les problèmes d'isomorphisme de mesures de multiplication, cette structure implique deux sortes de mesures (des souris et des morceaux de fromage) et quatre mesures proportionnelles (18 morceaux de fromage pour 3 souris est équivalent à x morceaux de fromage pour 1 souris). Or, la mesure recherchée correspond ici à la valeur pour 1. Ce problème peut se résoudre en s'appuyant sur le raisonnement suivant : 18 morceaux de fromage ÷ 3 souris = 6 morceaux de fromage/souris. Lorsque les nombres sont peu élevés, il est aussi possible de trouver la réponse par distribution effective, c'est-à-dire, dans ce cas-ci, en représentant 3 souris et en distribuant un à un les morceaux de fromage entre celles-ci jusqu'à épuisement des 18 morceaux de fromage. La réponse correspond évidemment au nombre de morceaux de fromage pour une souris. Cette stratégie permet de considérer dans un premier temps les souris et ensuite les morceaux de fromage, sans avoir à les traiter simultanément.

Notons qu'il est aussi possible, pour résoudre des problèmes de division partage, de recourir à l'addition répétée (en l'occurrence, additionner 3 jusqu'à l'obtention de 18) ou à la soustraction répétée (en l'occurrence, retrancher 3 de 18 jusqu'à l'obtention de 0). La réponse au problème correspond alors au nombre de fois que le nombre 3 a été ajouté ou retranché. Cependant, étant donné que les deux mesures, 18 et 3, ne sont pas de la même sorte (18 morceaux de fromage et 3 souris), ces stratégies sont relativement difficiles à interpréter. En effet, on ne peut, en additionnant à répétition 3 souris, obtenir 18 morceaux de fromage, tout comme on ne peut soustraire 3 souris, à répétition, de 18 morceaux de fromage. Pour mettre en relation l'addition répétée et la soustraction répétée avec les données du problème, il convient ainsi de considérer que le nombre de 3 représente le nombre de fois qu'on a donné (ou enlevé), à chaque souris, un morceau de fromage : 3 morceaux de fromage + 3 morceaux de fromage + (…) = 18 morceaux de fromage ou 18 morceaux de fromage – 3 morceaux de fromage – 3 morceaux de fromage – (…) = 0 morceau de fromage. L'addition répétée et la soustraction répétée s'interprètent toutefois plus facilement dans les problèmes de division groupement.

La division groupement

Contrairement au problème de partage, où la valeur pour 1 est recherchée, dans les problèmes de division groupement, il convient d'identifier le nombre de groupements, autrement dit le nombre de fois qu'une mesure «entre» dans une autre. Prenons le problème suivant : *Halima a cueilli 45 fleurs. Elle décide de faire des bouquets contenant chacun 5 fleurs. Combien de bouquets pourra-t-elle faire?*

Problème d'isomorphisme de mesures, la division groupement

Bouquets	Fleurs
1	5
x	45

Ce problème implique deux sortes de mesures, soit des bouquets et des fleurs, et quatre mesures qui forment une proportion, c'est-à-dire que 5 fleurs pour un bouquet est équivalent à 45 fleurs pour x bouquets. Pour trouver le nombre de bouquets, il convient d'identifier combien de fois 5 «entre» dans 45. La mesure «5 fleurs», d'une certaine façon, est utilisée comme unité de mesure pour mesurer «45 fleurs». En d'autres mots, ce problème nécessite de rechercher combien de groupements de 5 il est possible de faire avec 45. La division repose ainsi sur le raisonnement suivant : 45 fleurs ÷ 5 fleurs/bouquet = 9 bouquets. La division étant largement définie dans les écoles en s'appuyant sur le sens partage, cette structure de problèmes n'est généralement pas associée d'emblée par les élèves à la division et favorise par conséquent une diversité de stratégies : les groupements effectifs (faire des groupements de 5 fleurs jusqu'à l'obtention de 45 fleurs et compter ensuite le nombre de groupements effectués); l'addition répétée de 5 fleurs jusqu'à l'obtention de 45 fleurs ou la soustraction répétée de 5 à partir de 45 jusqu'à l'obtention de 0 (la réponse correspond dans les deux cas au nombre de 5); la multiplication avec un terme manquant (___ × 5 = 45). Les problèmes de division groupement apparaissent ainsi particulièrement pertinents pour amener les élèves à établir des relations entre différentes stratégies et ainsi favoriser la coordination de connaissances. Dans le cadre de notre séquence, nous avons en particulier misé sur des problèmes de division groupement pour introduire la division en tant qu'opération inverse de la multiplication.

Les problèmes scalaires

Les problèmes scalaires impliquent uniquement une sorte de mesures. La relation multiplicative entre deux mesures appartenant à une même sorte de mesures est établie, et ce, à partir des expressions «fois plus» ou «fois moins». Prenons, à titre d'exemple, le problème suivant : *Juliette a 15$. Son grand frère a 3 fois plus d'argent qu'elle. Combien d'argent a-t-il?* Comme le montre la figure suivante, 15 et x expriment une même sorte de mesures (des dollars), tandis que le nombre 3 représente ce que Vernaud (1981) appelle un opérateur scalaire, lequel est sans dimension, c'est-à-dire qu'il n'exprime pas une mesure, mais plutôt la relation multiplicative entre deux mesures.