PARTIE 1

Autour du programme de mathématiques, de la résolution de problèmes et de l’enseignement des mathématiques

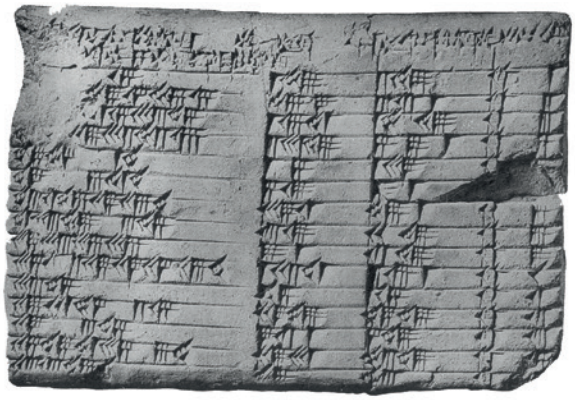
CHAPITRE 1

L'activité mathématique au programme

Aux origines

Les mathématiques ont pour ainsi dire toujours fait partie de l'existence humaine. Les plus anciennes traces d'activités mathématiques identifiées remontent à environ 20 000 ans. Il s'agit d'un os dans lequel on a fait des entailles pour compter, semble-t-il. Or, qui dit faire des mathématiques dit « apprendre » des mathématiques, même si ce n'est pas sous la forme à laquelle on pense aujourd'hui ! On peut apprendre les mathématiques à l'école, bien sûr, mais aussi « en famille », en pratiquant un métier, une religion, un art, etc.

Tablette mésopotamienne



Source : https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Plimpton_322.jpg

On sait qu'il y a 6000 ans environ, en Mésopotamie (zone qui recouvre actuellement l'Irak, l'Iran et la Syrie), on donnait déjà des cours de mathématiques dans des écoles. On a trouvé des centaines de tablettes d'argile rédigées par des étudiants, couvertes de chiffres, de problèmes, de méthodes de résolutions de différents types de problèmes, etc. Les Égyptiens qui ont bâti les pyramides enseignaient aussi les mathématiques de manière formelle (par exemple à l'école des scribes), et c'était également le cas des Grecs et des Romains, évidemment. Bien sûr, cette forme d'éducation mathématique était réservée à un petit nombre d'individus. La majorité des gens apprenait à compter (l'argent, les mesures, etc.) de leurs parents ou en se formant à un métier.

C'est essentiellement à la Révolution française (fin du 18e siècle) qu'a été lancée l'idée d'une école primaire obligatoire et gratuite pour tous… réellement instaurée seulement 100 ans plus tard[1].

1. On pourrait mentionner aussi le système mis en place en Prusse sous Frédéric II, aussi au 18e siècle.

Comme ce fut le cas en Europe, au Québec, ce sont les communautés religieuses qui ont d'abord pris en charge l'enseignement. Il n'y avait alors pas de « programme » général, mais on trouvait plusieurs « guides d'enseignement » rédigés par des pédagogues et proposant une certaine progression à travers un contenu choisi, des problèmes et des explications, le tout accompagné d'un discours sur l'importance de la formation mathématique de l'enfant et les avantages de l'approche proposée. Ici, il faut attendre les années 1960 (et la Révolution tranquille) pour que l'État prenne en main l'éducation de base en regroupant les écoles (en plus d'en construire des milliers à travers le Québec), en uniformisant les contenus et en réformant aussi la formation des enseignants (en particulier à l'UQAM, créée en regroupant entre autres le Collège Sainte-Marie fondé en 1848, l'École normale Jacques-Cartier instituée en 1857 et l'École normale Ville-Marie).

Les premiers curriculums de mathématiques

Les programmes de mathématiques du début du 20e siècle destinés aux jeunes enfants étaient très orientés vers « la vie pratique ». On voulait que les élèves apprennent à compter, à calculer et à mesurer, en lien direct avec des activités du quotidien… de l'époque. Ça n'a donc pas *tellement* changé. Ces programmes présentaient souvent des « leçons » où l'enseignante travaillait verbalement avec les enfants, car le papier était encore une chose assez rare. On faisait donc pas mal de « mathématiques mentales », ou plus justement de « mathématiques orales » à l'époque !

Sans entrer dans les détails, rappelons que les programmes québécois des années 1960 ont ensuite été marqués par le mouvement des « Mathématiques nouvelles », qui proposait un découpage très fort (et supposément « rationnel ») en contenus et techniques mathématiques à faire apprendre. On commençait, dès la maternelle, par des éléments de la « théorie des ensembles »[2], très populaire à l'époque ! Par exemple, on présentait aux élèves une image avec deux groupes de pommes dessinées et on demandait à la classe « Est-ce que les deux collections sont équivalentes ? Pourquoi ? »

Dans les années 1970, on a cherché à revenir un peu plus « à l'enfant », et à penser en termes de ce qu'il devait pouvoir *faire* mathématiquement. Ceci a conduit, dans les années 1980, à un programme « par objectif », avec un contenu toujours très détaillé et un découpage très précis du point de vue des comportements attendus des élèves. On avait des « objectifs terminaux » du genre *Se familiariser avec les caractéristiques de la numération en base 10*, puis une série d'objectifs « spécifiques » de genre *Grouper et regrouper des objets en base dix* ou *Décrire oralement un regroupement d'objets*, etc. C'est aussi l'époque où on a réalisé l'importance de la résolution de problème et de la technologie, par exemple.

Dans les années 1990, on a « réformé » une bonne partie de ces programmes pour les assouplir un peu, réalisant que la poursuite d'objectifs trop spécifiques tendait à faire perdre de vue les objectifs plus « globaux », tels que :

- Établir des relations
- Gérer une situation-problème
- Raisonner
- Communiquer

2. On a encore des traces de ceci, quand on demande aux enfants de grouper des objets, de classer, etc. Ce sont des apprentissages tout à fait pertinents. Mais on ne fait plus référence à la théorie des ensembles !

… mais sans arriver vraiment à « briser le moule ». C'est pourquoi, au début des années 2000, on a lancé un grand chantier de réforme de tous les programmes au bout duquel les « contenus » (mathématiques par exemple) n'ont pas changé de manière radicale, mais où l'approche, elle, s'est transformée. Il s'agira maintenant d'un programme *par compétences*, et rédigé en considérant comme *professionnelle* la personne qui enseigne, lui donnant la responsabilité de faire les choix concernant les objectifs et les activités pour ses élèves.

Les mathématiques dans le programme actuel

Nous en sommes donc aux programmes actuels, dans lesquels c'est le développement de compétences qui doit guider l'action éducative, et où les « savoirs essentiels » sont vus comme des *occasions* de développer ces compétences tout en apprenant à l'intérieur d'un domaine donné.

Contrairement aux versions précédentes, nos programmes actuels donnent très peu de précisions aux enseignants concernant ce qu'ils devraient faire avec les élèves, ou ce que les élèves devraient pouvoir faire[3]. Si peu même qu'on a fini par produire un 2e document pour accompagner le programme : la *Progression des apprentissages* (PDA). Celui-ci présente des concepts et des processus dans un format assez semblable aux « objectifs » des programmes précédents. Mais on y voit plus clairement l'idée d'une certaine progression à travers les années, et il est présenté comme un document *d'accompagnement* qui devrait « faciliter » et non « décider » le travail de planification de l'enseignement.

Un élément très important à ne pas perdre de vue, c'est que le projet principal de l'enseignement des mathématiques au primaire est de faire *faire des mathématiques* (et non pas « d'apprendre » ou de « comprendre » des contenus mathématiques) afin de développer des compétences. Ceci est d'autant plus facile à oublier que les manuels scolaires sont généralement organisés pour être « *conformes à la PDA »,* mais font peu de liens avec les compétences, à moins de prendre le temps de bien travailler avec le Guide du maître, ce que peu d'enseignants ont le temps de faire.

Le préscolaire

On trouve sur le site du gouvernement du Québec[4] une section fort utile réservée au programme du préscolaire. On découvre que les mathématiques sont présentes de manière explicite dès le programme du préscolaire 4 ans, dans ce qui est appelé le *Domaine cognitif.* Les mathématiques sont identifiées comme un des « Axes de développement » autour de 2 composantes : l'expérimentation de « pratiques numériques et spatiales » et la résolution de problèmes. On voudra donc dès le préscolaire mettre les élèves en contact avec les nombres, et dans le cadre d'activités qui demandent de réfléchir, d'essayer des choses, de faire des observations…

On trouve dans les pages suivantes des *Pistes d'observation* et *d'intervention* concernant le développement de ces composantes. Par exemple :

- Manipuler différents objets pour faire des groupements, compter, classer, comparer, organiser, etc.;
- Créer des suites et des régularités;
- Expliquer à sa façon les raisons d'un événement;

3. Certains programmes actuels d'autres provinces canadiennes sont très différents à cet égard.
4. www.education.gouv.qc.ca/enseignants/pfeq/prescolaire/

- Procéder par essais et erreurs;
- Suivre une séquence d'étapes pour accomplir une tâche;
- Participer à l'élaboration de suites d'actions et de démarches;
- Trouver diverses stratégies pour résoudre un problème;
- Proposer une solution à un problème;
- Considérer plus d'une solution possible;
- Etc.

À travers tout ça, on remarque qu'il s'agit bel et bien de *mettre l'enfant en situation de faire des choses* : on est loin d'une pédagogie qui serait basée sur « l'explication ».

Les programmes du préscolaire sont organisés autour de compétences non disciplinaires liées aux expériences de l'enfant et à partir desquelles les compétences disciplinaires vont se développer. Ainsi, dans le programme de la maternelle (5 ans), on a dans la catégorie des *Savoirs essentiels* une liste de *Stratégies cognitives et métacognitives* sous forme de verbes (d'action !) que l'on va souvent rencontrer par la suite :

- Observer
- Explorer
- Expérimenter
- Organiser
- Planifier
- Classifier
- Comparer
- Sélectionner
- Mémoriser
- Produire des idées nouvelles
- Utiliser un mot exact
- Questionner et se questionner
- Anticiper
- Vérifier
- Évaluer

On découvre aussi une série de « *Connaissances se rapportant au développement cognitif* » associées directement aux mathématiques par le jeu. En effet, le jeu est l'approche pédagogique privilégiée au préscolaire. Ce qu'on entend par « jeu » n'est pas très clair, mais une liste est fournie ! On mentionne par exemple des jeux…

- de nombres (p. ex. loto, calendrier);
- de dénombrement (p. ex. : compter le nombre d'amis);
- d'estimation (p. ex. : la quantité).

Le primaire

Du côté de l'enseignement primaire, trois compétences disciplinaires ont été identifiées :

- Résoudre une situation-problème mathématique;
- Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques;
- Communiquer à l'aide du langage mathématique.

Notez comment les formulations mettent encore l'accent sur des *verbes d'action*! Si c'est en forgeant qu'on devient forgeron, c'est en résolvant des problèmes, en raisonnant et en communiquant en mathématiques que ces compétences se développent. C'est un point très important, souligné à la fois dans le programme et la PDA. Il faut que les élèves « construisent leurs connaissances », c'est-à-dire qu'ils soient activement impliqués dans la production d'observations et d'idées mathématiques, de solutions, de questions, de méthodes, etc. Les élèves doivent manipuler, construire, essayer, décoder, présenter, discuter leur travail mathématique et celui des autres.

Ceci n'exclut pas la présence occasionnelle « d'explications » ou de « démonstrations » dans l'enseignement. Mais ces exposés de concepts, de processus ou de raisonnements devraient être vus comme des *points de départ* de l'activité mathématique des élèves. C'est leur activité qui est « au programme », pas les « contenus mathématiques » !

Chaque compétence est par ailleurs découpée en *composantes* qui aident à voir ce qu'on veut faire faire aux élèves, et la PDA présente les concepts et processus mathématiques à propos desquels ces actions devraient avoir lieu. Les éléments d'évaluation du développement d'une compétence donnée vont dans le même sens. Par exemple, dans le cas de la compétence 2, « Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques », on lit :

> À la fin du premier cycle, l'élève imagine et met en place des processus personnels pour les opérations d'addition et de soustraction sur les nombres naturels, en calcul mental et écrit.

C'est de cette manière que l'on devrait observer le développement de la compétence à *Raisonner* dans des situations où l'élève doit (ce sont les composantes) :

- Cerner les éléments de la situation;
- Mobiliser des concepts et processus appropriés;
- Appliquer ces concepts et processus;
- Justifier ses actions.

Ce qu'on peut bien faire correspondre aux éléments de la PDA, qui indique que l'élève devrait par exemple :

1. Développer des processus de calcul mental
   a) À l'aide de processus personnels, déterminer la somme ou la différence de deux nombres naturels.
2. Développer des processus de calcul écrit
   a) À l'aide de processus personnels, en utilisant du matériel ou des dessins, déterminer la somme ou la différence de deux nombres naturels inférieurs à 100.

La compétence à « raisonner » vise donc directement les concepts et processus mathématiques que l'on veut que l'élève *explique* et *utilise* de manière réfléchie.

La compétence 1, « Résoudre une situation-problème mathématique », vise plutôt le processus de résolution de problème en mathématiques. Ses composantes correspondent à différentes actions réalisées au moment de chercher des solutions : comprendre le problème, représenter la situation, organiser son travail mathématique (« je vais d'abord calculer ceci, puis cela, etc. ») et le vérifier, sans oublier l'aspect de la communication de la démarche et de la solution.

Il est important de ne pas voir les composantes comme une série d'étapes à suivre linéairement : ce sont plutôt des « habiletés » en lien avec la compétence qu'on souhaite amener l'élève à développer. De plus, on pourra réaliser des activités qui ciblent l'une ou l'autre des composantes, donnant alors moins d'importance aux autres aspects.

Évidemment, l'exercice de la compétence 1 repose sur le fait que l'élève « raisonne » en travaillant sur un problème mathématique, et rien de tout cela ne serait possible sans les aspects liés à la compétence 3 (« Communiquer à l'aide du langage mathématique »), en particulier l'interprétation et la production de messages à caractère mathématique (comme de lire et de comprendre l'énoncé d'un problème ou d'un exercice !). Cette troisième compétence souligne par ailleurs une habileté avec laquelle vous êtes probablement moins familiers : « Établir des liens entre le langage mathématique et le langage courant ». Qu'est-ce que cela signifie ?

Le vocabulaire mathématique « de base » (carré, diagonale, égale, plus petit, « 3 fois plus », « avant-dernier », etc.) est assez présent au quotidien et important dans plusieurs disciplines. Le sens « purement mathématique » de ces mots est parfois légèrement différent : par exemple, en mathématique, une pyramide a plusieurs « sommets » ! Certains symboles sont aussi utilisés de manière particulière au quotidien, comme dans cette publicité où on nous informe que « 1 = 2 ».

Publicité dans laquelle 1 = 2

Enfin, un autre aspect est lié au « discours » mathématique de manière générale. L'écriture mathématique (celle des problèmes, des solutions, des explications, etc.) se fait dans un « style » particulier qui est bien différent de l'écriture d'une histoire ou d'une chanson, par exemple. Comme le disait si bien Saïd Medjber[5] :

> … le discours mathématique ne dit pas qui l'énonce (il n'y a pas de dialogue), il ne dit pas le lieu où il s'énonce et quand il s'énonce.

5. Un directeur d'école en Algérie : https://www.algerie-dz.com/Le-langage-courant-et-le-langage-mathematique.html

Le langage mathématique est aussi moins redondant et connotatif. Les noms et les objets mathématiques n'ont généralement pas de synonymes ou de sens rapproché. Et les adjectifs y jouent un rôle jamais négligeable ! Le langage mathématique exige en plus une grande rigidité syntaxique : dire « j'en ai 5 de plus » et « j'en ai plus de 5 » ne signifie pas du tout la même chose.

Plus on avance en mathématique, plus ceci devient important, mais ces aspects sont déjà présents à l'école primaire. On attend des enfants qu'ils s'engagent face à un texte mathématique différemment de ce qu'on espère d'eux dans un contexte littéraire, et nos balises pour discerner « un bon texte » mathématique sont différentes de celles avec lesquelles on juge d'autres productions écrites. Bref, cette 3e compétence a vraiment toute son importance.

Enseigner les compétences ? Des concepts ? Des processus ?

Une compétence ne s'enseigne pas, elle se développe. Aussi, il n'est nulle part question, dans le programme, d'enseigner aux élèves des « étapes de résolution de problèmes », des « modèles de raisonnements » (par exemple : déductif, inductif, etc.), ni de formaliser avec eux ce qui caractérise la communication en mathématiques.

En cohérence avec ce qui précède, il ne s'agit pas de « dire », de « montrer », ni même « d'expliquer » ces choses aux élèves. Ce que l'on souhaite, c'est mettre les élèves en situation de résoudre des problèmes, de raisonner et de communiquer… Et de porter attention, pour les soutenir, à la manière dont, par exemple, ils interprètent l'énoncé d'un problème (C3) pour représenter la situation (C1) et en cernent les éléments importants (C2).

On revient à l'idée de leur faire *faire* des mathématiques. Et c'est aussi sous cet angle qu'on devrait voir le travail autour des concepts et des processus. En effet, faire des mathématiques implique évidemment de travailler avec des idées mathématiques. Ces idées sont les « savoirs essentiels » listés dans la PDA. En faisant travailler les élèves avec ces idées, on souhaite qu'elles leur deviennent *familières*. Cette familiarité leur permettra ensuite de s'engager avec de nouvelles idées et de faire des mathématiques de plus en plus sophistiquées.

Référentiel d'intervention en mathématique

En août 2019, le ministère a publié un document supplémentaire pour orienter et soutenir l'enseignement des mathématiques, en s'appuyant sur la recherche et l'expertise de gens du milieu. Ce *Référentiel d'intervention en mathématique* vise à mieux expliquer le lien entre « enseigner les mathématiques » et « faire des mathématiques en classe » afin de :

> … donner une orientation quant à la façon d'aborder les concepts mathématiques, de définir les intentions de la résolution de problèmes ainsi que de préciser le rôle de l'enseignant et celui de l'élève en classe de mathématique. (p. 1)