

# Introduction

« Dessine le problème ». « Laisse des traces de ta démarche ». Voici les consignes les plus utilisées dans la classe de mathématiques, surtout lors du travail sur la résolution de problèmes écrits. De quoi s'agit-il? Que l'élève doit-il faire exactement? En quoi cette consigne contribue-t-elle à l'apprentissage de résolution des problèmes mathématiques et de développement du raisonnement mathématique? Allons le vérifier.

Prenez une feuille de papier et un crayon. Nous vous demandons représenter quelques problèmes écrits en respectant les règles suivantes :

- Vous ne pouvez pas utiliser de lettre ni de mot;
- Vous ne pouvez pas utiliser les opérations arithmétiques (+, -, ×, ÷) ni les symboles qui les remplacent;
- Vous pouvez utiliser les nombres qui figurent dans le texte du problème;
- Vous pouvez dessiner, utiliser les symboles « ? », ou des flèches;
- Votre représentation doit permettre à une personne qui *n'a pas lu le problème* de proposer le plan de calcul, la (les) phrase(s) mathématique(s) pour trouver la réponse au problème.

Par exemple, pour le problème suivant :

« *J'ai 8 pommes dont 5 sont rouges et les autres sont jaunes. Combien de pommes sont jaunes?* »

Votre représentation doit permettre la création de la phrase mathématique suivante  $8 - 5 = 3$ .

Voici les deux problèmes à représenter.

Le problème des tulipes :

- Annie aide sa mère à planter des tulipes devant la maison. Elles ont planifié planter 32 tulipes. Elles ont travaillé pendant 5 minutes et ont déjà planté quelques tulipes. Il leur reste encore 19 tulipes à planter. Combien de tulipes ont-elles plantées?

Le problème des pirates :

- Dans son coffre aux trésors, le pirate Nez-Crochu a 43 pierres précieuses. Il a 18 pierres précieuses de moins que son ami Jambe-de-Bois. Mais, sauf toi, personne ne le sait. Peux-tu dire combien de pierres précieuses se trouvent dans le coffre aux trésors de Jambe-de-Bois, sans l'avoir ouvert?

## Exercice 1

Sur une feuille blanche, représentez les deux problèmes en respectant les consignes. Lorsque vous avez terminé les représentations, donnez-les à une autre personne qui n'a pas lu le texte des deux problèmes. Demandez-lui d'interpréter vos représentations pour proposer le calcul à exécuter afin de trouver la réponse à chaque problème. Qu'observez-vous?

## Exercice 2

Maintenant, regardez les deux représentations faites par des élèves de la troisième année primaire pour un autre problème.

Illustration a)

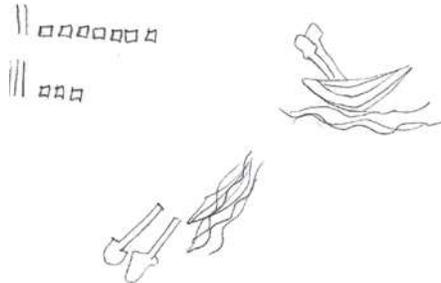
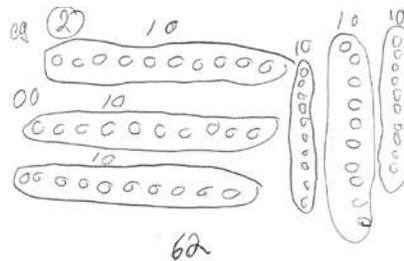


Illustration b)



Essayez à votre tour de proposer une phrase mathématique à exécuter pour trouver la réponse à ce problème.

## Analyse des représentations des trois problèmes

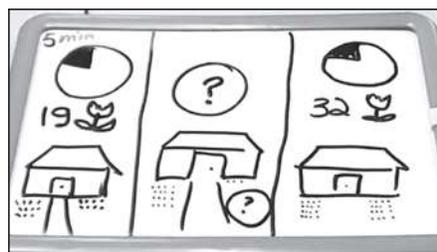
Lors de nos projets de recherche, nous avons proposé le jeu de représentation à plusieurs personnes : aux élèves, aux enseignants du primaire et aux conseillers pédagogiques. Les représentations produites variaient, mais le résultat était souvent peu satisfaisant, surtout parmi les élèves : la personne qui interprétait la représentation avait de la difficulté à proposer un calcul en cohérence avec le problème. Pourquoi?

Voici quelques représentations des problèmes proposés plus haut.

### Le problème des tulipes

Annie aide sa mère à planter des tulipes devant la maison. Elles ont planifié planter 32 tulipes. Elles ont travaillé pendant 5 minutes et ont déjà planté quelques tulipes. Il leur reste encore 19 tulipes à planter. Combien de tulipes ont-elles plantées?

Représentation 1

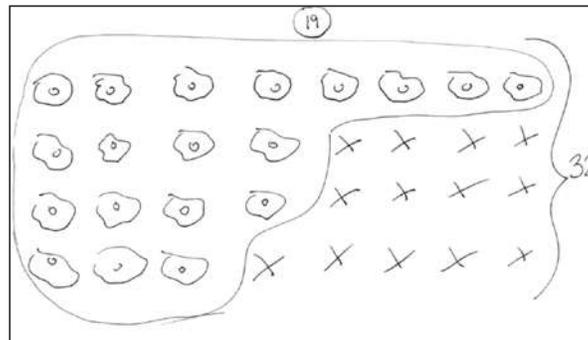


## L'histoire

Sur la représentation 2, l'enseignante du primaire a présenté une séquence qui illustre l'histoire du problème : début, milieu et fin. Tous les éléments du contexte sont illustrés, même la donnée superflue. Ainsi, l'enseignante utilise le dessin de l'horloge pour faire référence aux 5 minutes de travail mentionnées dans le texte. Elle met une image de tulipe à côté de chaque nombre pour préciser la nature de ces quantités. Elle dessine une maison et le chemin devant elle pour décrire le contexte de l'histoire et met les petits points pour signaler l'emplacement et la quantité des fleurs. Les trois parties du dessin correspondent à la séquence des trois temps de l'histoire. Nous pouvons penser qu'au début, 19 tulipes ont été déjà plantées, ce qui ne correspond pas à l'histoire du problème dans lequel les 19 tulipes qui restent sont à planter. La deuxième partie présente le questionnement : quelque chose s'est passé. La troisième partie présente le nombre 32 et aussi 32 points devant la maison : le travail est terminé.

Malgré le fait que le partenaire de jeu de l'enseignante ait trouvé la phrase mathématique qui correspond au problème :  $32 - 19 = 13$ , nous pouvons constater que la représentation ne correspond pas tout à fait au problème et elle est loin d'être transparente. Elle comporte plusieurs éléments d'information sur le contexte, tel que le temps, la maison, le chemin, qui ne sont pas importants pour la planification du calcul. Les deux quantités essentielles sont représentées deux fois (nombres et points), ce qui n'est pas nécessaire. Malgré tous les éléments représentés, il manque quelque chose qui permettrait l'identification de l'opération arithmétique à réaliser, sans devoir la deviner.

**Représentation 2**



## Le calcul

Dans cette image, nous ne voyons pas de développement de l'histoire comme dans la représentation précédente. Toutefois, certains éléments sont semblables. Les quantités sont représentées deux fois (nombres et symboles). Les symboles de fleurs sont utilisés référant à la nature des objets, soit des tulipes. Comme dans la représentation précédente, il semble que les 19 tulipes sont déjà plantées et les 13 (« X ») sont absentes, ce qui ne correspond pas à l'histoire. Il y manque la question. En même temps, la réponse au problème peut être trouvée sans aucune opération arithmétique : il suffit de compter les symboles « X ». Bref, il semble que l'auteur a représenté sa solution du problème plutôt que le problème initial.

## Le problème des pirates

Dans son coffre aux trésors, le pirate Nez-Crochu a 43 pierres précieuses. Il a 18 pierres précieuses de moins que son ami Jambe-de-Bois. Mais, sauf toi, personne ne le sait. Peux-tu dire combien de pierres précieuses se trouvent dans le coffre aux trésors de Jambe-de-Bois, sans l'avoir ouvert?

## Représentation 3



## L'histoire

Sur la représentation 3, nous pouvons reconnaître les trois états qui illustrent l'histoire du problème en séquence : début, milieu et fin. Toutefois, le texte du problème ne mentionne pas une telle séquence. Il s'agit en fait de comparer des quantités. Ce type de problème est appelé problème de comparaison et il ne contient pas d'action.

Les chapeaux et la main crochue font référence au contexte (pirates, personnes). Nous pouvons penser que la personne a accumulé deux paquets : 43 et 18, ce qui nous mène à l'opération d'addition appropriée  $43 + 18 = 61$ . Similaire à la représentation 2 du problème des tulipes, cette représentation semble être nourrie par une solution déjà trouvée. Elle ne communique nullement la situation de comparaison décrite dans le problème.

L'analyse de représentations créées dans ce jeu a fait naître des questions importantes sur le rôle de représentations dans la résolution de problèmes mathématiques :

- Doit-on résoudre le problème **d'abord** pour être capable à le représenter **ensuite**?
- À quoi peut servir la représentation si la solution est déjà trouvée?
- Si on ne peut pas trouver la solution tout de suite, que peut-on représenter pour s'aider et comment le faire?
- Quels sont les éléments essentiels à représenter pour faciliter le choix d'opération(s)?

Dans cet ouvrage, nous proposons une méthode de représentation de problèmes écrits accompagnée d'une approche d'enseignement de la résolution de ces problèmes. C'est une réponse que nous avons trouvée aux questions soulevées ci-haut. Cette méthode s'est avérée efficace à travers nos recherches et pratiques d'enseignement, bien que nous soyons conscientes qu'elle n'est probablement pas unique.

Dans les deux premiers chapitres, nous allons examiner la nature de l'exercice de résolution de problèmes écrits à l'école et les difficultés que les élèves rencontrent sur le chemin du développement du raisonnement mathématique. Dans les troisièmes et quatrièmes chapitres, nous allons décrire les principes pédagogiques importants à respecter pour mieux aider les élèves à développer leur raisonnement mathématique ainsi que le plan détaillé du cheminement de celui-ci.

Les trois parties qui suivent présentent les activités à faire vivre avec les élèves des trois cycles de l'école primaire (6-8 ans, 8-10 ans, et 10-12 ans). Le chapitre 19 traite de la question d'évaluation. Le chapitre 20 propose une courte conclusion.

Pour terminer l'introduction, nous vous proposons le texte du problème dont vous avez analysé les représentations (a et b, p. 12) faites par les élèves.

### **Le problème des bateaux**

Cette année, les pirates ont pillé 27 gros bateaux de commerce. C'est 34 de moins que la quantité de petits bateaux que les pirates ont pillés et qu'ils ont fait couler. Combien de petits bateaux ont-ils coulé cette année à cause de méchants pirates?

Qu'en pensez-vous? Dans quelle mesure avez-vous réussi à élaborer une phrase mathématique afin de calculer la réponse?