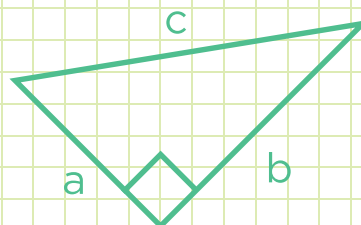


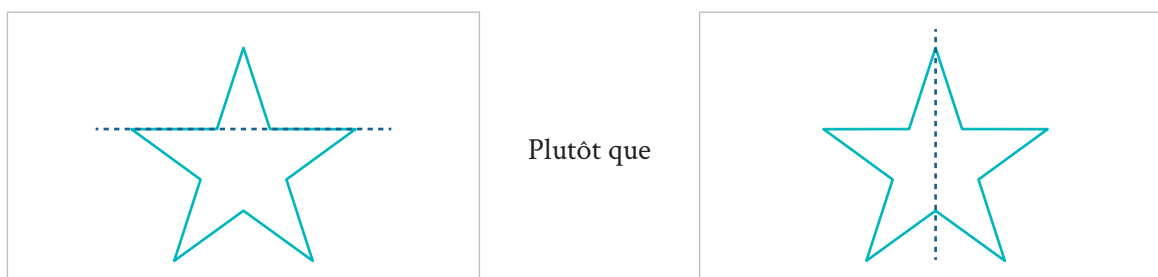
# 2.



**De la mesure des côtés  
de figures à l'interprétation  
de mesures manquantes**

Nous introduisons ici les sections portant sur les angles et les relations entre la mesure des angles et celle des côtés d'un polygone ou d'un solide. Dès le primaire, les élèves explorent des grandeurs sur une variété de solides et de figures. Nous savons que des activités de classification de figures ou de solides attireront l'attention des élèves non seulement sur le nombre et la longueur des côtés des figures ou des arêtes d'un solide, mais aussi sur le nombre et la grandeur des angles. La superposition des angles de certaines figures contribuera à repérer, par exemple, que l'angle droit d'un triangle est conservé à la suite d'une transformation géométrique comme la rotation.

Les élèves seront invités à découper ou à plier des figures pour en identifier les fractions, une opportunité pour échanger à propos des angles.. Pothier *et al.* (1982) nous rappelle que les élèves ne seront pas sensibles au partage en parties égales dans un premier temps. Par exemple, pour fractionner une étoile, certains élèves du primaire tracent un trait qui sépare la pointe de l'étoile du reste de la figure. Ce type de procédure devient une occasion de discuter de l'importance de l'équipartition du partage pour identifier une fraction, mais aussi pour introduire le vocabulaire relatifs aux angles (intérieurs, extérieurs, aigus, obtus).



Bien que les premières procédures de superposition d'angles puissent leur permettre de répondre à certaines questions d'identification des angles, les élèves ressentiront ses limites et la nécessité de se doter d'un code qui favorise la communication. La mesure des angles s'exprime en degré et en radian pour le cercle, le radian dérivant du système international d'unités de mesure. Toutefois, l'usage d'une unité de mesure conventionnelle ne semblera nécessaire aux élèves que dans la mesure où ils ressentent le besoin de communiquer leurs observations durant les activités proposées.

Les angles correspondent à une représentation géométrique formée de deux demi-droites de même origine. Pour les élèves, le mot « angle » correspond d'abord à une forme ayant une longueur déterminée qui se caractérise par son contour (Salin et Berthelot, 1992). C'est alors que la grandeur d'un angle est mise en relation avec la longueur de ses côtés. Dans ces conditions, les élèves considèrent que plus la longueur des côtés d'un angle est petite, plus l'angle est petit. Pour lever cet obstacle, il sera nécessaire de présenter des contre-exemples et de les discuter. En effet, les élèves doivent concevoir l'angle comme une grandeur. C'est à cette condition que les élèves cesseront de confondre la longueur des segments et la grandeur des angles. Des activités contribuant à mettre en oeuvre d'autres outils que la perception visuelle pour mesurer seront nécessaires. Les travaux de Salin et de Berthelot<sup>1</sup> nous rappellent que la compréhension de la notion d'angle débute lorsque les élèves considèrent l'angle comme inclinaison d'un segment. Ajoutons qu'à la fin du secondaire, selon Dionne et Boukhssimi (1989), l'étude de la pente d'une droite dans un graphique exigera des élèves de reconnaître que l'inclinaison de cette pente n'est pas modifiée quelle que soit le segment choisi sur la droite.

1. Salin, M.-H. et Berthelot, R. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux.

L'interprétation de la grandeur des angles sera reprise durant l'apprentissage de plusieurs concepts géométriques au secondaire. Les élèves pourront reconnaître que l'hypoténuse correspond au côté opposé à l'angle droit. C'est ainsi que le théorème de Pythagore ( $a^2 + b^2 = c^2$ ) et l'apprentissage des figures semblables étudiées au 1<sup>er</sup> cycle du secondaire, ainsi que les notions de sinus étudiées au 2<sup>e</sup> cycle du secondaire, permettront de raisonner des problèmes variés dont ceux de mesures manquantes.

## 2.1 La mesure des angles

Les angles interviennent dans plusieurs domaines. Par exemple, les diagrammes circulaires, en statistiques, font intervenir les angles par le découpage des données selon un certain nombre de secteurs. Bridoux *et al.* (2016) rappellent que l'angle a une mesure qui ne dépend ni de sa position ni de la longueur de ses côtés. Il s'agit toutefois d'une construction à réaliser pour l'élève. Le rapporteur d'angles est d'ailleurs un instrument qui fait intervenir ces invariants<sup>2</sup> de manière implicite. L'élève peut donc « lire » la mesure d'un angle sur le rapporteur sans pour autant en connaître les caractéristiques. Comment se construit ce savoir ?

Piaget nous apprend que dès 3 ans et demi ou 4 ans l'enfant reconnaît de façon plus ou moins aisée les objets familiers derrière une cache. Par la suite, il distingue des formes comme le cercle et le carré par rapport à des formes ouvertes. Par contre, le cercle et le carré ne seront pas nécessairement différenciés entre eux. Un début de différenciation entre les formes curvilignes et rectilignes le conduira à porter attention aux angles. Par la suite, les carrés peuvent être distingués des rectangles et les cercles, des ellipses. Vers 5 ans, l'enfant fait la découverte successive du losange et du trapèze ; finalement, les croix et les étoiles se différencient. Au début du primaire, l'exploration tactile de l'enfant devient méthodique et il reconnaît les formes complexes. Toutefois, de nombreuses erreurs dans la représentation des formes complexes pourront surgir. L'exploration tactile deviendra un outil important pour reconnaître les formes complexes dans un micro-espace. Soumettez-vous à cette activité de reconnaissance de formes derrière une cache et voyez ce qu'elle peut exiger des tout-petits. C'est à cette occasion que les élèves se familiariseront avec les perpendiculaires et les parallèles, les angles droits, aigus et obtus.

Par contre, n'offrir que des occasions d'apprendre dans un micro-espace pourrait contribuer à mettre en place des obstacles didactiques, c'est-à-dire « produite par l'expérience des manipulations des petits objets dans l'espace de préhension de la vie courante » (Salin et Berthelot, 1996, p. 421). Il sera donc important d'explorer aussi le macro-espace et le méso-espace. L'exploration des bâtiments qui entourent l'élève permettra de repérer des « coins » un peu plus petits ou un peu plus grands que les « coins droits ». À ce titre, Vézina et DeBlois (2004) observent que des questions comme « Où est l'école en relation avec la rue ? Avec le parc ? Avec le terrain de jeu ? » ont conduit les élèves à utiliser un discours mathématique différent, notamment dans le choix des mots pour parler des objets en trois dimensions et en deux dimensions. En effet, ce contexte a permis aux élèves de se déplacer derrière un bâtiment soit pour dénombrer ou identifier le nombre de faces lorsqu'ils observent et analysent des objets comme une maison, une école ou un terrain de jeux.

---

2. On appelle « invariants » les caractéristiques qui ne varient pas malgré certaines transformations apportées à une figure.

Cette exploration transformerait leurs conceptions des figures géométriques, notamment lorsqu'ils considèrent que les figures géométriques sont des dessins (Mura, 2001). En effet, la figure est une construction cognitive des élèves, alors que le dessin vise à représenter cette construction. Cette confusion entre dessin et figure expliquerait pourquoi les élèves considèrent que la longueur des côtés d'une figure détermine la mesure des angles de cette figure.



## 2.1.1

### Retour sur vos expériences d'ancien élève

---

- Décrivez des situations où vous avez eu besoin de connaître les angles ?
  - Que signifiait pour vous la notion d'angle ? Que connaissiez-vous de l'angle ?
  - Y a-t-il une situation où vous, ou quelqu'un d'autre, avez dû calculer l'angle d'un cercle ?
  - Quelles sont les mesures d'angles qui ont été importantes pour vous ?
- 

À nouveau, il est important de tirer profit de vos expériences d'ancien élève, mais aussi de vous en distancer pour favoriser l'apprentissage de vos élèves. Il peut y avoir des différences importantes dans la façon d'apprendre des individus, et le fait de se préoccuper de l'apprentissage et de la réussite de quelqu'un d'autre ne va pas sans une compréhension de la construction des concepts.

#### Quelques éléments de réflexion :

- 1 Quel rôle joue l'apprentissage de la mesure d'angle dans la société ?
- 2 Qu'est-ce qui a facilité votre apprentissage quand vous étiez élève ?
- 3 Qu'est-ce qui vous a étonné durant la lecture de cette section ?
- 4 Quel contenu nouveau pourrait favoriser l'apprentissage de vos élèves ?

Il sera intéressant d'amorcer une discussion avec vos collègues ou vos parents sur l'une ou l'autre des réponses données à ces questions. Le partage des expériences de chacun pourrait contribuer à mettre en évidence les différences et les ressemblances entre les réponses échangées et élargir la perspective d'enseignement.



2.1.2

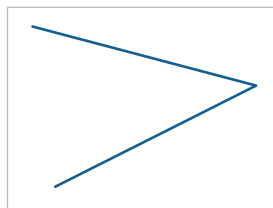
## Des erreurs et leur origine

### ⇒ Des erreurs conceptuelles

---

#### **ERREUR** Assimilation de la mesure de l'angle à une mesure de longueur

##### D'OÙ VIENT-ELLE?



Berthelot et Salin (1996) ont observé que, pour les élèves, le mot « angle » correspond à une forme particulière, caractérisée par son contour, pour laquelle la longueur et l'ouverture sont confondues. Pour certains élèves, plus la longueur des côtés d'un angle est grande, plus l'angle est grand. Il devient nécessaire de distinguer la figure, qui a des propriétés géométriques, et le dessin qui représente cette figure.

---

#### **ERREUR** Seuls les angles droits sont considérés comme étant des angles

##### D'OÙ VIENT-ELLE?

L'élève considère que s'il mesure un angle à différents points des demi-droites, l'angle sera différent. Les travaux de Baldy *et al.* (2005) confirment que jusqu'à environ 10 ans, « les élèves rencontrent des difficultés à verbaliser les propriétés d'un angle, à dessiner un angle et à identifier des angles dans une figure ouverte » (Berthelot et Salin, 1996, p. 57). Leurs résultats permettent de donner un sens aux propos des élèves qui ne reconnaissent pas que les angles aigus ou les angles obtus sont aussi des angles.

---

## **ERREUR** L'orientation modifie la grandeur de l'angle dans une figure

### **D'OÙ VIENT-ELLE?**

Les élèves qui assimilent le dessin (représentation imparfaite) à une figure (représentation idéale) ont tendance à étudier les figures de façon statique. Par exemple, ces élèves ne pensent pas faire pivoter une figure pour étudier les angles. L'utilisation des transformations géométriques pourrait contribuer à alimenter la réflexion des élèves.

## **Des erreurs procédurales**

---

## **ERREUR** Erreur dans la manipulation du rapporteur

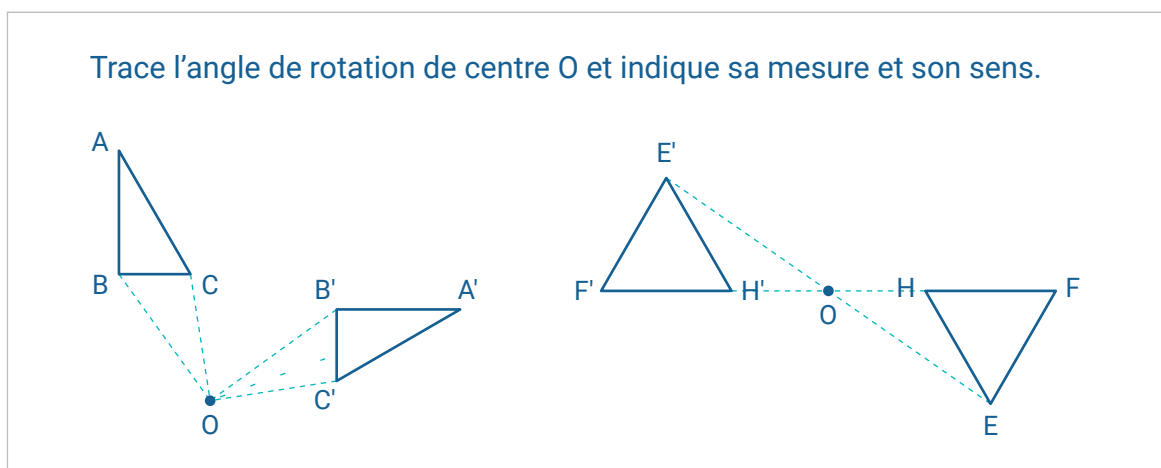
### **D'OÙ VIENT-ELLE?**

Nous considérons parfois que la lecture d'un rapporteur d'angles, comme la lecture d'une règle, correspond à la lecture d'un nombre sur une surface graduée. Toutefois, l'identification d'un point de départ, l'identification de l'alignement par rapport à un des côtés et la prise en compte de l'ouverture entre les segments sont autant de composantes à considérer pour lire la mesure d'un angle sur un rapporteur. Dans le cas où peu de manipulations sont faites avec le rapporteur, certains élèves n'arrivent pas à identifier l'origine de l'angle pour en mesurer la grandeur. La construction d'angles par les élèves pourrait contribuer à donner du sens à cette procédure de lecture.

### **Quelques productions d'élèves à analyser**

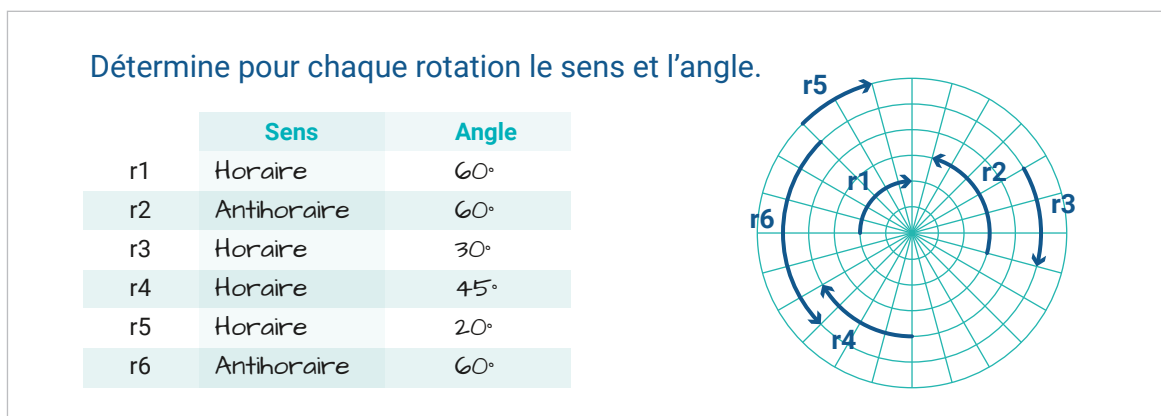
L'activité présentée à la figure 4 a été réalisée par un élève de 14 ans. Elle permet d'observer les exigences en jeu lorsqu'il doit tracer les angles de rotation de 90 ou de 180 degrés de deux triangles (Ledoux et al., 2005, no. 4.1). La production attendue devait montrer l'orientation horaire ou anti-horaire de la rotation des deux triangles, par une flèche, et la mesure de cette rotation. Ainsi, bien que dans la première figure, l'élève trace les pointillés permettant de repérer l'angle de rotation de l'angle BOB' et de l'angle COC'. Une partie des pointillés montrant l'angle AOA' semblent « cachés » par la figure. De plus, le sens et la mesure de 90° ne sont identifiés. La deuxième figure montre les traces des angles de rotation pour les angles EOE' et HOH'. Il n'est pas possible d'apprécier si l'élève trace l'angle de rotation de l'angle FOF' à cause de sa superposition avec HOH'. Pour les deux figures, le sens et la mesure des angles ne sont pas indiqués. Nous pouvons poser l'hypothèse selon laquelle la construction de la correspondance entre les sommets est considérée, par l'élève, comme une solution indiquant la mesure et le sens de la rotation. L'élève interprète la consigne de la tâche en ne réalisant que la première des trois procédures requises soit la construction de la correspondance entre les sommets, négligeant l'identification du sens de la rotation et de la mesure de cette rotation.

**Figure 4. Production d'un élève concernant la rotation d'une figure**



La deuxième activité (figure 5) a été réalisée par le même élève. L'observation de sa production permet de constater que, contrairement à la tâche précédente, le sens de la rotation a été reconnu sans erreur. Toutefois, la mesure des angles pose problème. En étudiant le secteur correspondant à r1, nous observons que l'élève y a attribué une grandeur de 60° plutôt que de 90°. Le secteur correspondant à r2 indique aussi 60° plutôt que 90° tout comme r6. Le secteur r3 indique 30° plutôt que 45° (inspiré de Ledoux et al., 2006).

**Figure 5. Production d'un élève concernant la mesure des secteurs d'un cercle (DeBlois, 2010, p. 48)**



L'étude de chacune des réponses montre une régularité dans les erreurs de l'élève. En effet, il a dénombré par 10 chacune des divisions du cercle à la manière de la graduation d'un rapporteur d'angles. Il est ainsi possible de poser l'hypothèse selon laquelle il a privilégié ses connaissances sur la graduation d'un rapporteur d'angles à celles portant sur le nombre de secteurs (24) qu'il aurait été nécessaire de repérer pour en trouver la grandeur, soit 15 degrés. En somme, la deuxième tâche montre que cet élève peut repérer le sens de la rotation même s'il ne l'identifie pas dans la première tâche. En outre, les erreurs concernant la mesure des angles dans la deuxième tâche montrent que la notion d'angle exige de revoir son interprétation. Enfin, il sera nécessaire de cerner le contrat didactique élaboré par l'élève.



2.1.3

## Des conditions d'apprentissage

Cette section vise à proposer des exemples de situations permettant de donner du sens à la mesure d'angles.

---



### Développer une curiosité à l'égard de la variété d'angles dans notre environnement familier (macro-espace)

L'observation des constellations d'étoiles, des bâtiments ou de la longueur de l'ombre du Soleil à partir d'un bâton pourront être illustrés par un dessin. Ce faisant, les élèves seront familiarisés avec la distinction entre le dessin et ce qu'il représente. Ces observations permettent aussi de reconnaître comment les angles contribuent à la diversité des figures. Elles permettront aussi de ressentir la nécessité de développer un langage pour communiquer.

---



### Développer des activités pour communiquer la mesure des angles

Le vocabulaire géométrique pourra émerger d'un vocabulaire familier (coin, inclinaison, plus grand qu'un coin, plus petit qu'un coin) pour créer la nécessité de regrouper les angles selon certaines caractéristiques (aigu, obtus, droit, plat, rentrant, extérieur, intérieur, équiangle, équivalence).

---



### Construire des figures avec le géoplan (micro-espace)



L'utilisation du géoplan favorise la construction rapide de différentes figures géométriques tant régulières qu'irrégulières. Ces constructions suscitent des observations contribuant à distinguer le périmètre de l'aire pour les figures construites.





## Classifier des polygones (micro-espace)

La classification de polygones permettra aux élèves de décrire les segments, mais aussi la variété d'angles.



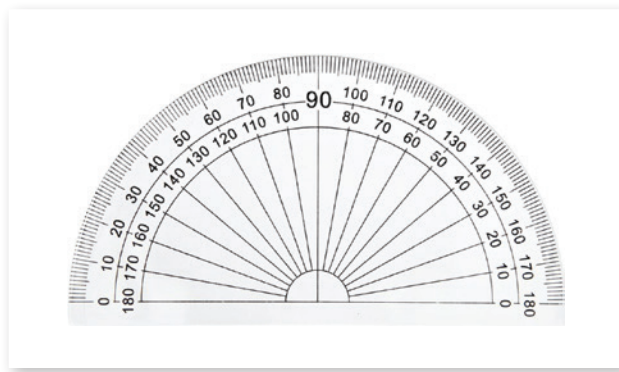
## Plier un cercle pour le partager en secteurs en utilisant le diamètre (micro-espace)

Le pliage d'une figure circulaire se fera d'abord en deux, puis en quatre. Ainsi, il sera possible de prendre appui sur une expérience de l'angle plat et de l'angle droit pour explorer des angles aigus et des angles obtus. Par exemple, pour un cercle de papier plié en quatre, chacun des secteurs du cercle permet de créer des angles droits semblables aux quatre coins d'une figure rectangulaire. Pour un cercle de papier plié en différents secteurs égaux, il est possible de faire observer aux élèves la division des 360 degrés du cercle par le nombre de secteurs. À cette occasion, il serait intéressant de revenir sur l'histoire de la division du cercle en 360 degrés. Par exemple, les babyloniens auraient utilisé un calendrier de 30 jours par mois et de 12 mois par année, comptant 360 jours au total. L'observation des étoiles qui sont décalées chaque nuit, compte tenu de la rotation de la Terre autour du Soleil, aurait conduit à identifier que chacun de ces écarts entre les journées était de 1 degré. Cette observation permet de créer des rapporteurs d'angles gradués autrement que par 10. L'opération de division, au sens de partage, contribuera à offrir aux élèves l'occasion de donner un sens à la notion de degré. Cela pourrait contribuer à éviter des erreurs comme celle présentée à la figure 5. Ces rapporteurs d'angles, non conventionnels, contribueront à rendre les élèves attentifs aux caractéristiques des figures dans les situations proposées.



## Mettre au point des procédures pour lire les angles sur un rapporteur

Afin de contourner les erreurs liées à l'utilisation du rapporteur d'angles, il est souhaitable de prendre du temps pour faire observer aux élèves que l'un des côtés de l'angle correspond à la graduation 0 indiqué sur le rapporteur.





## 2.1.4

### Questions pour étudier les exigences des tâches qui s'adressent aux élèves et leur apport dans le développement cognitif des élèves

Cette section vise à utiliser l'ensemble des savoirs didactiques présentés précédemment. Une tâche qu'il est possible de proposer aux élèves de la classe vous est donnée. Elle est suivie de quatre questions qui vous permettront d'en faire l'analyse.



#### Tâche proposée aux élèves :

Comme bien des jeunes, Billy veut se faire tatouer, mais comme bien des parents, les siens ne sont pas d'accord. Billy a choisi une autre option pour graver son histoire. Plutôt que de la dessiner sur son corps, il veut la graver sur du bois.

Son plan est simple : il tracera un cercle qu'il divisera ensuite en 8 parties égales. Il pourra donc « tatouer » à sa guise chaque section pour personnaliser son histoire. Pour partager son cercle en parties égales, il se questionne sur la mesure de l'angle de chaque secteur. Peux-tu l'aider ?



Un ami trouve que son idée est géniale, car elle est économique et sans douleur ; il souhaite cependant utiliser un cercle plus grand. Il t'explique que, de ce fait, la mesure de ses angles sera plus grande. Comment fais-tu pour savoir s'il a raison ?



Son idée se répand et un autre de ses camarades veut partager son cercle en 12 parties plutôt qu'en 8. Quel sera l'incidence de ce choix sur la mesure de chacun des angles ?